

Sucesiones

2020

Observa la siguiente historieta:

¡Buen día Pepe! ¿Se mejoró su hijo?

¡Buen día ingeniero!
Sí gracias, está mejor

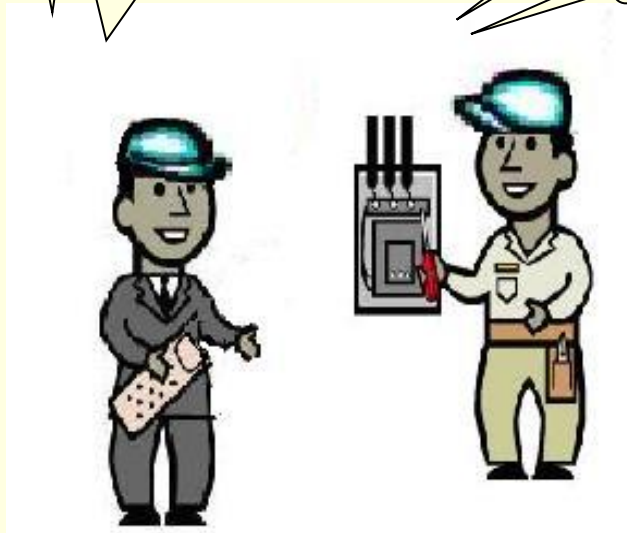
Nos mandaron un nuevo refrigerante. Necesito que anoten la temperatura cada 3 horas. Les aviso también a los otros turnos, pero confío en usted para completar esta tabla.

Ok jefe.
Quédese tranquilo.

Snif!!! ¡Atchis!

Hasta luego. Cuídese que parece que su hijo lo contagió. Acuérdesse del asado del sábado

¡Hasta luego!



El ingeniero le dio a Pepe la siguiente tabla que él completó con los datos de temperatura:

	Día 1									Día 2								
h	0	3	6	9	12	15	18	21	24	3	6	9	12	15	18	21	24	
t°	56,5	56,4	56,3	56	58,6	59	59,4	58	56,5	56,5	56,4	56,1	58,4	59,2	59,5	58,1	56,2	



Mhm! voy a hacer el trabajo bien prolijo, como le gusta al ingeniero.

Y Pepe ordenó las temperaturas de mayor a menor:

	Día 1									Día 2								
h	0	3	6	9	12	15	18	21	24	3	6	9	12	15	18	21	24	
T°	59,5	59,4	59,2	59	58,6	58,4	58,1	58	56,5	56,5	56,5	56,5	56,4	56,4	56,3	56,2	56,1	

¿Te parece que en este caso le servirá al ingeniero la tabla de Pepe ordenada de mayor a menor?

LAS SUCESIONES NUMÉRICAS

Llamamos **sucesión numérica** a una función que aplica el conjunto de los números naturales en el de los reales

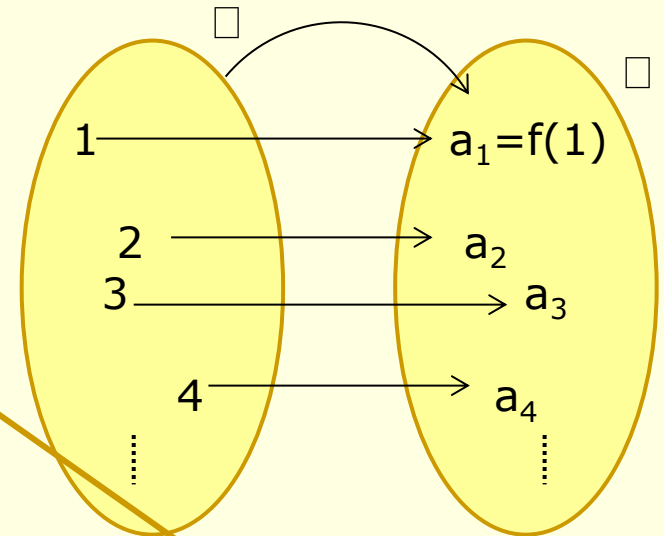
$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} / a_n = f(n)$$

Término enésimo o general

Es un conjunto **ordenado** de los infinitos elementos. En símbolos:

sucesión

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\} = \{a_1; a_2; a_3; a_4; \dots; a_n; \dots\}$$



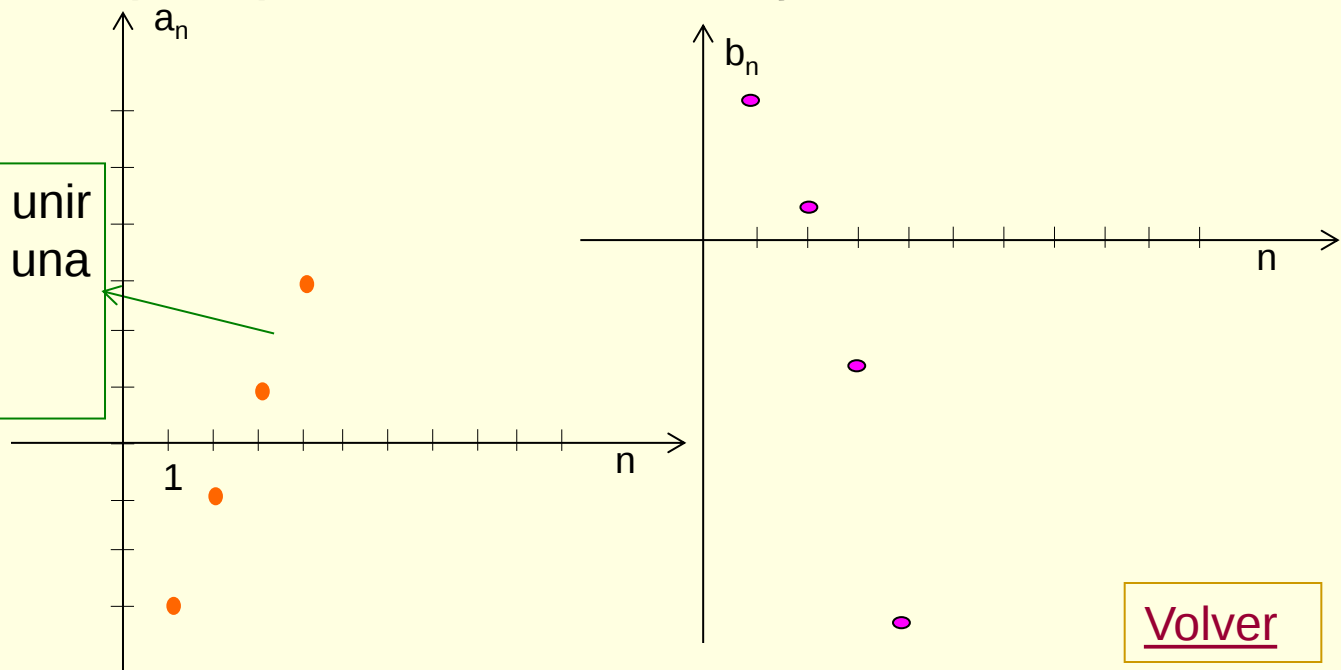
Ejemplo 1) Encontrar los primeros términos y graficar: $\{a_n\} = \{2n - 5\}$ y $\{b_n\} = \{5 - n^2\}$

Para encontrar los términos reemplazamos la n por 1, 2, 3,...

$$\{a_n\} = \{2n - 5\} = \{-3 ; -1 ; 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; \dots\}$$

$$\{b_n\} = \{5 - n^2\} = \{4, 1, -4, -11, \dots\}$$

No es correcto unir los puntos con una línea



[Volver](#)

Ejemplo 2: Encontrar el término enésimo de

$$\{c_n\} = \{0, \frac{3}{4}, 1, \frac{15}{16}, \frac{3}{4}, \frac{35}{64}, \dots\}$$

- Hay dos términos iguales en distinta posición, $\therefore$ las fracciones pueden estar simplificadas, hay que hallar las equivalentes.
- $c_3 = 1$, también puede estar simplificada.
- $c_1 = 0 \therefore$ debe ser cero el numerador pero no el denominador $\Rightarrow$ el numerador tiene la forma $n^p - 1$ con $p \in \mathbb{N}$.
 - Para $n-1$ los numeradores serían: 0, 1, 2, 3,... NO coinciden.
 - Para n^2-1 los numeradores serían: 0, 3, 8, 15, 24, 35,... no se cumple para el 3º y 5º términos, que pueden estar simplificados.
- Si para $n = 3$, $c_3 = 8$ la fracción equivalente debería ser $\frac{8}{8} = 1$. Razonando de manera parecida para $n = 5$ surge $c_5 = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$
- Con estas fracciones, el denominador parece ser 2^n .
- Y así:
$$c_n = \frac{n^2 - 1}{2^n}$$

$\therefore$ Significa por lo tanto

Sucesiones monótonas

$\{a_n\}$ es **monótona** $\Leftrightarrow \forall n: (\{a_n\}$ **creciente** $\vee \{a_n\}$ **decreciente**)

“o en sentido
excluyente”

Sucesiones crecientes y decrecientes

$\{a_n\}$ es **creciente** $\Leftrightarrow \forall n: a_n < a_{n+1}$

$\{a_n\}$ es **decreciente** $\Leftrightarrow \forall n: a_n > a_{n+1}$

Observa las gráficas de las sucesiones vistas para:

$\{a_n\} = \{2n - 5\} = \{-3 ; -1 ; 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; \dots\}$

[Ver](#)

$\{b_n\} = \{5 - n^2\} = \{4, 1, -4, -11, \dots\}$

En la primera, a medida que n crece, los términos a_n también lo hacen, $\{a_n\}$ es una sucesión **creciente**.

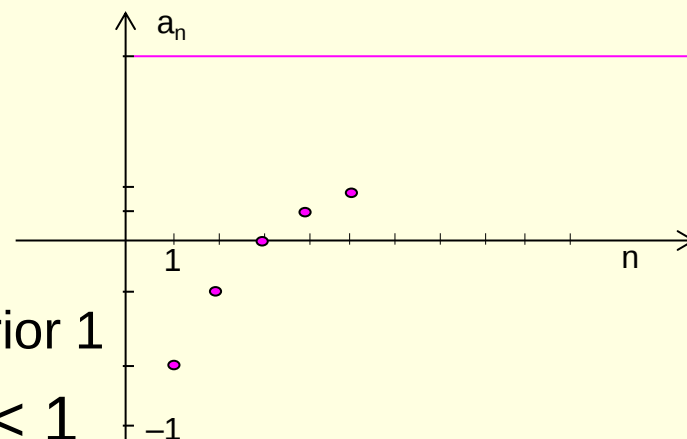
En cambio $\{b_n\}$ es **decreciente**.

Sucesiones acotadas

$\{a_n\}$ es **acotada** $\Leftrightarrow \exists k > 0 / \forall n: |a_n| \leq k$

$$\text{Ej.: } a_n = \frac{n-3}{n+2}$$

cuando n crece los a_n también lo hacen,
pero con una tendencia a estabilizarse.



$\{a_n\}$ crece pero es acotada, con cota superior 1

porque: $n-3 < n+2 \Rightarrow (n-3) / (n+2) < 1$

Entonces **$k = 1$** pues $\forall n: |a_n| < 1$

La cota inferior es igual (en este caso) al primer término: $-2/3$
(porque la sucesión es monótona creciente)

Sucesiones convergentes

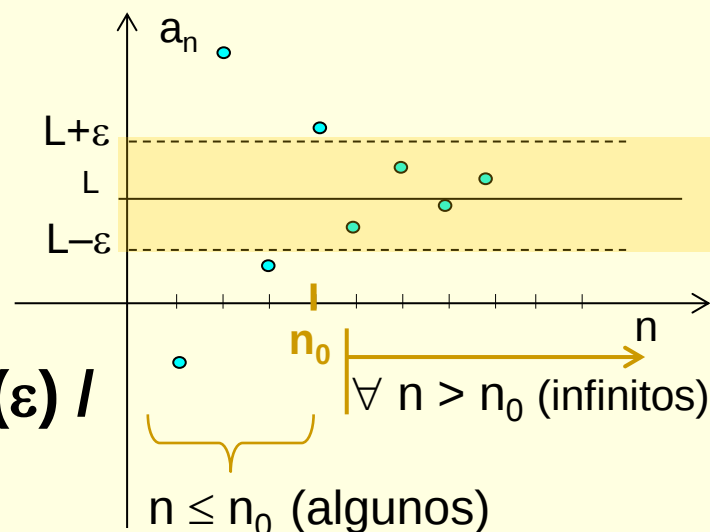
$$\{a_n\} \text{ convergente} \Leftrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Recuerda: para que exista límite éste debe ser **único** y **finito**.

Si el límite no existe las sucesiones serán **no convergentes**.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) /$$

$$\forall n > n_0: |a_n - L| < \varepsilon$$



Propiedades de los límites

Teorema 1:

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ y si $f(x) = f(n) = a_n$ cuando x es natural,

entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

Este teorema nos permite aplicar los mismos procedimientos al cálculo de límites de sucesiones, que los que se usan para funciones de x .

Por ello el Álgebra de los límites es muy similar.

Se puede también aplicar, por ejemplo, la Regla de L'Hospital

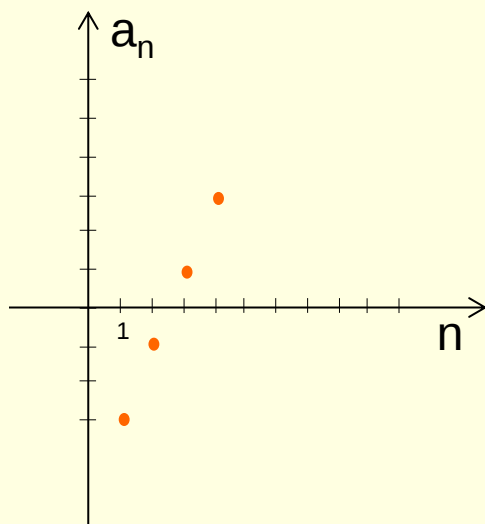
$$\text{Ej.: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n^2} = \infty \quad \text{porque} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

Teorema 2: Del emparedado

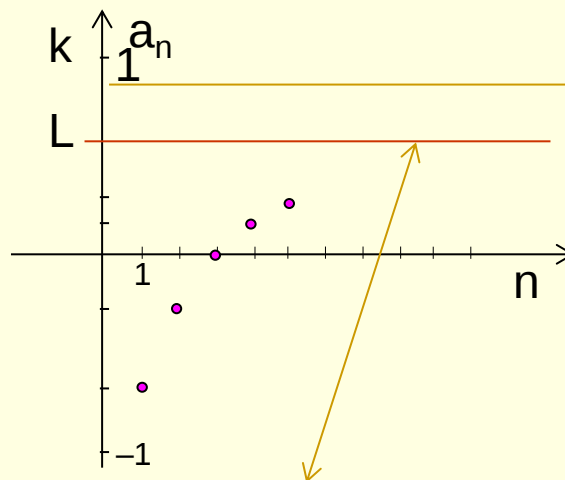
Tiene el mismo significado que para funciones de variable real

Convergencia de las sucesiones monótonas acotadas

Si una sucesión es **monótona creciente** y **tiene cota superior**, es **convergente**



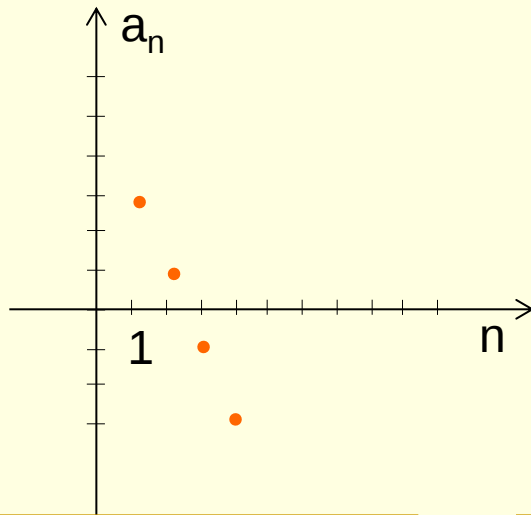
$a_n \rightarrow \infty$
 $\{a_n\}$ no es acotada
 $\{a_n\}$ no es convergente



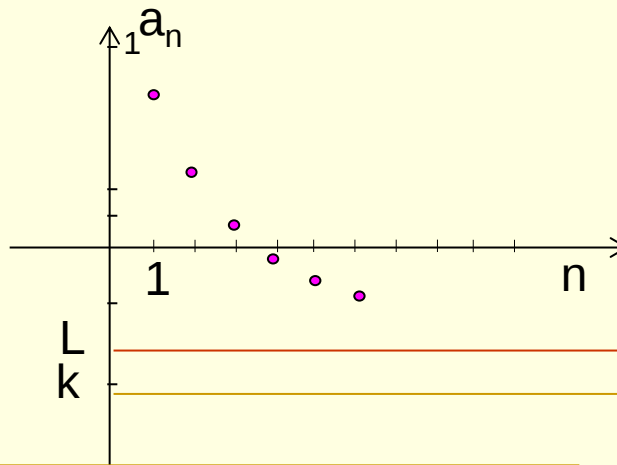
$\{a_n\}$ tiene cota superior k
 $\exists L \leq k \Rightarrow \{a_n\}$ converge

Convergencia de las sucesiones monótonas acotadas

Si una sucesión es **monótona decreciente** y **tiene cota inferior**, es **convergente**



$a_n \rightarrow -\infty$
 $\{a_n\}$ no es acotada
 $\{a_n\}$ no es convergente



$\{a_n\}$ tiene cota inferior k
 $\exists L \geq k \Rightarrow \{a_n\}$ converge

Convergencia de las sucesiones monótonas acotadas

Las dos anteriores se reúnen en una única propiedad:

Si una sucesión es **monótona y acotada**,
entonces es **convergente**

Analiza si las siguientes proposiciones son V o F:

- Si una sucesión es monótona, entonces es convergente.
- Si una sucesión es acotada, entonces es convergente.
- Si una sucesión es convergente, entonces es acotada.
- Si una sucesión es convergente, entonces es monótona.

El número e

Se puede demostrar que la sucesión:

$$\{a_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\} = \{2; 2,25; 2,37\dots; 2,44\dots; 2,48832;\dots\}$$

es monótona creciente y tiene cota superior, por lo tanto tiene límite y es convergente.

A ese límite lo llamamos e

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Encontrarás desarrollos más completos en el documento en formato pdf en la misma página: <http://fing.uncu.edu.ar>