I. RELACIONES Y FUNCIONES

PAREJAS ORDENADAS

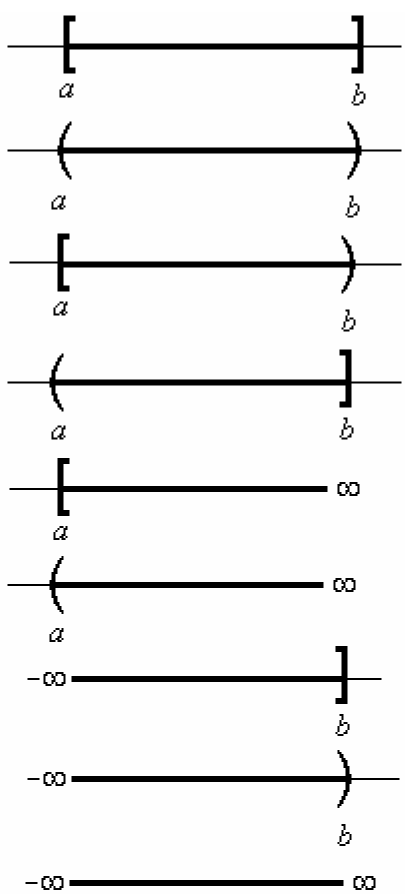
Una pareja ordenada se compone de dos elementos “x” y “y”, escribiéndose (x, y) donde “x” es el primer elemento y “y” el segundo elemento. Teniéndose que dos parejas ordenadas (x, y) y (z, w) serán iguales si $x = z$ y $y = w$.

1.1. PRODUCTO CARTESIANO

Definición:

> El producto cartesiano de dos conjuntos A y B (se simboliza AxB) es el conjunto de todas las parejas ordenadas (x, y), tales que “x” pertenece al primer conjunto A y “y” pertenece al segundo conjunto B, es decir: $AxB = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$

<u>Nota:</u> Se da por hecho, que el estudiante recuerda el conjunto de los números reales $(\mathbb{R})$ y su representación sobre una línea recta, así como los intervalos de números reales:

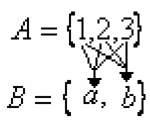


- a) Cerrado ; $[a,b] = \{x | a \le x \le b\}$
- b) Abierto ; $(a,b) = \{x | a < x < b\}$
- c) Cerrado - Abierto ; $[a,b) = \{x | a \le x < b\}$
- d) Abierto - Cerrado ; $(a,b] = \{x | a < x \le b\}$
- e) Cerrado - Infinito ; $[a,\infty) = \{x | x \ge a\}$
- f) Abierto - Infinito ; $(a,\infty) = \{x | x > a\}$
- g) Infinito - Cerrado ; $(-\infty,b] = \{x | x \le b\}$
- h) Infinito - Abierto ; $(-\infty,b) = \{x | x < b\}$
- i) Los reales ; $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$

EJEMPLOS

1) Con los conjuntos $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{a,b\}$, obtener los productos cartesianos AxB y BxA

Solución



Si el conjunto A tiene 3 elementos y el conjunto B tiene 2 elementos, entonces el producto cartesiano AxB y el BxA tendrán $3x2 = 6$ elementos (parejas ordenadas).

$$AxB = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

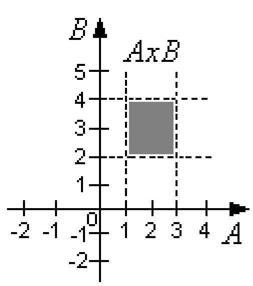
$$BxA = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

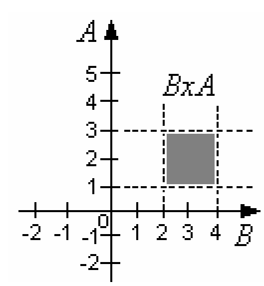
Véase que $AxB \neq BxA$, esto es, el producto cartesiano no es conmutativo

2) Sean los intervalos abiertos $A = (1,3)$ y $B = (2,4)$ subconjuntos de $\mathbb{R}$, obtener los productos cartesianos AxB y BxA.

Solución

En este caso el conjunto $A = (1,3)$, corresponde al intervalo abierto de todos los números reales comprendidos entre 1 y 3, y el conjunto $B = (2,4)$, corresponde también al intervalo abierto de todos los números reales entre 2 y 4, por consiguiente, AxB y BxA tendrán un número infinito de elementos (parejas ordenadas) y sólo los representaremos gráficamente como se muestra a continuación, representando los elementos del primer conjunto sobre el eje horizontal y los del segundo sobre el eje vertical.



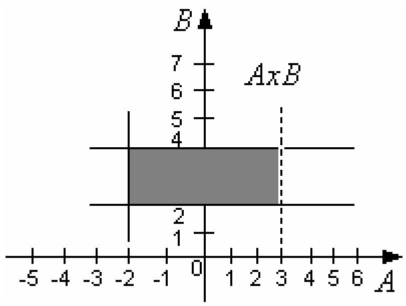


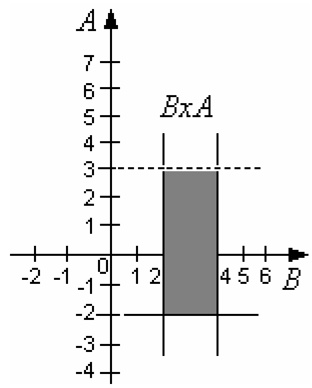
Obsérvese que las líneas punteadas indican que no se incluye la frontera de la región que representa AxB y BxA, por ser intervalos abiertos de números reales, que no incluyen los extremos del intervalo tanto el conjunto A como el B.

3) Sean $A = [-2,3)$ y $B = [2,4]$ subconjuntos de $\mathbb{R}$, obtener el producto cartesiano AxB y BxA

Solución

En los intervalos $A = [-2{,}3)$ y $B = [2{,}4]$, el corchete indica que se debe incluir el extremo de dicho intervalo, por lo que en las gráficas que indican este producto cartesiano, si se incluye la frontera donde es cerrado dicho intervalo, como se muestra a continuación:

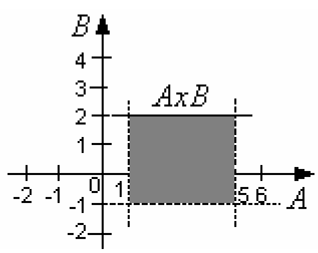


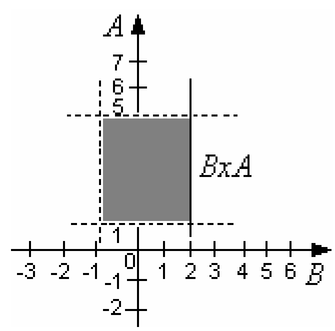


4) Para $A = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 5\}$ y $B = \{y \in \mathbb{R} / -1 < y \leq 2\}$, obtener el producto cartesiano AxB y BxA

Solución

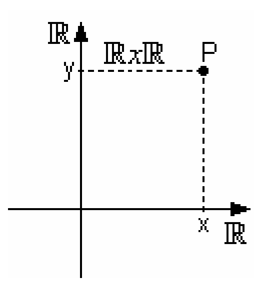
El conjunto A y B es otra forma de representar a los intervalos de estos conjuntos de números reales, lo cual es $A = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 5\} = (1,5)$ y $B = \{y \in \mathbb{R} / -1 < y \leq 2\} = (-1,2]$.





5) El producto cartesiano $\mathbb{R}x\mathbb{R}$ genera todo el plano cartesiano, donde cada punto "P" del plano representa un par ordenado (x, y) de números reales, trazando una recta vertical por el punto "P" hasta cortar al eje horizontal en "x" y una recta horizontal por "P" hasta cortar al eje vertical en "y".

Solución



EJERCICIOS

1) Sea $A=\{-2,0,3,7\}$ y $B=\{1,2,3\}$, obtener el producto cartesiano AxB y BxA y dibujar su gráfica.

2) Sea $T=\{1,2,3,4,5\}$ y $S=\{1,2\}$, obtener el producto cartesiano TxS y SxT y graficarlos.

3) Con $A=[-1,2)$ y $B=(-3,2)$ subconjuntos de $\mathbb{R}$, obtener el producto cartesiano AxB y BxA y graficarlos.

4) Si $K=\{x\in\mathbb{R}/-3\le x<1\}$ y $J=\{y\in\mathbb{R}/1.5<y<5.5\}$, obtener el producto cartesiano KxJ y JxK.

5) Con $\mathbb{R}$ y $A=[2,4]$, obtener $\mathbb{R}xA$ y $Ax\mathbb{R}$.

1.2. RELACIONES

Variable es costumbre representarla mediante alguna de las últimas letras del alfabeto, con la característica de que puede sustituirse en su lugar cualquier número real.

Constante es un valor real que permanece fijo en cualquier problema de aplicación matemática.

Definición:

Una relación en los reales es una regla de correspondencia que asocia a cada número real "x" de un conjunto de partida $A\subseteq\mathbb{R}$ (llamado Dominio de la relación) uno o más números reales "y" de un conjunto de llegada $B\subseteq\mathbb{R}$ (llamado Contradominio).

El papel que juegan las representaciones en la construcción del conocimiento es fundamental, de ahí que una relación puede tener varias representaciones, en forma verbal, algebraica, numérica o de tabla y gráfica. Para ilustrar esto, se utiliza el mismo ejemplo en cada representación:

1) **En forma verbal:**
Se describe la relación en lenguaje materno lo más precisa posible para poderla escribir, como por ejemplo, "un número real "y" es igual al cuadrado de otro número "x" más una unidad".

2) **En forma de ecuación algebraica:**
$y=x^2+1$

3) En forma numérica o de tabla:

Es un arreglo que puede ser en forma horizontal o vertical y en donde en el primer renglón o primera columna, se ubican algunos valores reales del primer número "x" y en el segundo renglón o columna se ubican los valores del número "y" (que con la ayuda del inciso **2)** se puede obtener).

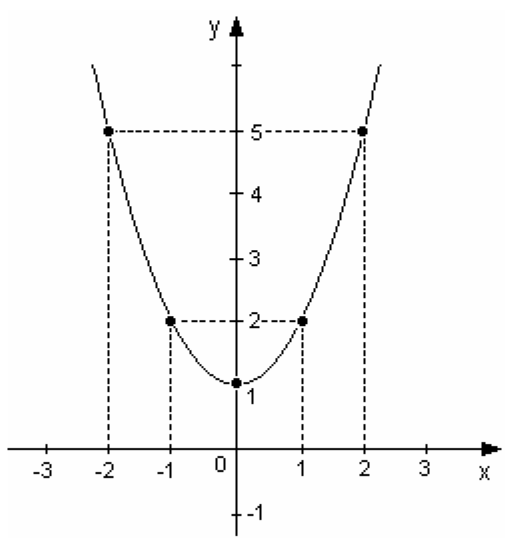
Nota: Por facilidad de cálculo se usaron en este caso sólo algunos números enteros, pero debe tenerse presente que los valores asignados a "x" pueden ser cualquier número real, y además, una tabla solo nos proporciona una parte de la relación.

x	-2	-1	0	1	2
y	5	2	1	2	5

x	y
-2	5
-1	2
0	1
1	2
2	5

4) En forma gráfica:

En esta representación, puede aplicarse el método que consiste en aprovechar los resultados de los incisos **2)** y **3)** anteriores, localizando sobre el plano cartesiano los puntos obtenidos en la tabla del inciso **3)** y uniéndolos con línea continua como se muestra, se obtiene un bosquejo de la relación, que sólo es una parte de la gráfica ya que entre mayor sea el número de puntos calculados en la tabla, el trazo de la gráfica será mejor. Algunas veces este método del punto puede conducir a errores si no son elegidos correctamente los valores que son asignados a la variable "x".



Nota: Se usa con mayor frecuencia cualquiera de las últimas tres representaciones y eventualmente la primera cuando se trata de resolver problemas.

EJERCICIOS

Con la representación dada, obtenga la representación solicitada en cada uno de los siguientes ejercicios:

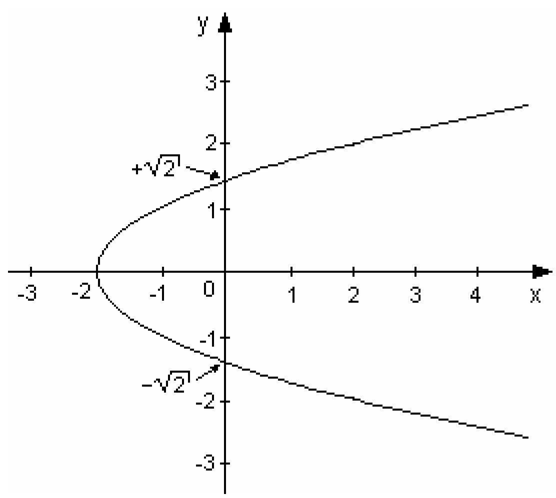
1) Con la representación algebraica $y = x$, obtenga su equivalente representación tabular con al menos 3 valores para "x".

2) Con la representación algebraica $y = x$, obtenga su equivalente representación gráfica (utilice el resultado del inciso anterior).

3) Con la representación algebraica $y = \sqrt{x}$, escriba su equivalente representación verbal.

4) Con la escritura de la siguiente representación verbal: "El cuadrado de un número "y" es igual a 4 menos el cuadrado de otro número "x"", encuentre su equivalente representación algebraica.

5) Con la representación gráfica que se muestra, obtenga una tabla de valores para cuando "x" toma los valores de $-2, -1, 0$ y 2.



6) Con la escritura de la siguiente representación verbal, "el cuadrado de un número "y" es igual a otro número "x" más dos", encuentre su equivalente representación algebraica.

Relaciones Implícitas y Explícitas

Una relación implícita expresada en forma algebraica, es aquella en donde no está despejada ninguna de sus variables, y es explícita cuando alguna de sus variables si esta despejada.

EJEMPLOS

Dadas las siguientes relaciones implícitas, expresarlas en su forma explícita.

1) $x^2 + y^2 = 9$

2) $2x - 3y = 1$

3) $x^2 y + y = x + 1$

4) $x^3 + 2x^2 - 2y^2 = y$

5) $\dfrac{2x - 3xy + 5y}{x+1} = 2$

Solución

Es costumbre llamar a la "x" variable independiente (v.i.) y a la "y" variable dependiente (v.d.) y generalmente, esta última es la variable que se despeja para obtener la forma explícita de una relación.

1) $x^2 + y^2 = 9$

$$y^2 = 9 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

2) $2x - 3y = 1$

$$-3y = 1 - 2x$$

$$y = \frac{1-2x}{-3}$$

$$y = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x$$

3) $x^2 y + y = x + 1$

$$(x^2+1)y = x + 1 \quad \text{Factorizando}$$

$$y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

4) $x^3 + 2x^2 - 2y^2 = y$

$$2y^2 + y - x^3 - 2x^2 = 0$$

Por fórmula general de 2° grado en "y"

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ ; \quad a = 2\ ;\ b = 1\ ;\ c = -x^3 - 2x^2$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(2)(-x^3 - 2x^2)}}{2(2)}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8x^3 + 16x^2}}{4}$$

5) $\dfrac{2x - 3xy + 5y}{x+1} = 2$

$$2x - 3xy + 5y = 2(x+1)$$

$$2x - 3xy + 5y = 2x + 2$$

$$-3xy + 5y = 2x + 2 - 2x$$

$$-3xy + 5y = 2$$

$$-y(3x-5) = 2$$

$$-y = \frac{2}{(3x-5)}$$

$$(-1)(-y) = (-1)\left[\frac{2}{(3x-5)}\right]$$

$$y = \frac{-2}{3x-5}$$

EJERCICIOS

Dadas las siguientes relaciones implícitas, expresarlas en su forma explícita.

1) $y^2 - 3x - 6y + 8 = 0$

2) $3x - 2y + 5 = 0$

3) $9xy - 3y - 6x - 12 = 0$

4) $4x^2 + 6xy + \frac{2x^2}{5} = 18 - 4xy$

5) $-8x = x^2 + 2xy$

1.3. FUNCIONES

Las funciones pertenecen a las relaciones, por lo que cualquier función es relación, pero no cualquier relación es función, por lo siguiente:

Definición:

Una función real de variable real, es una regla de correspondencia que asocia a cada número real "x" de un conjunto de partida $A \subseteq \mathbb{R}$ un único número real "$f(x)$" de un conjunto de llegada $B \subseteq \mathbb{R}$.

Una regla de correspondencia de una función real de variable real generalmente se da por medio de una o más fórmulas matemáticas y se representa con $f(x)$.

El conjunto de partida A es el **dominio** de la función, el conjunto de llegada B se le llama **codominio** o **contradominio** y al conjunto de los elementos "$f(x)$" de B se llama **rango** o **imagen** de la función.

Notación:

Algunas formas de denotar algebraicamente la regla de correspondencia en una función, pueden ser las siguientes: $y = f(x)$, $(x, f(x))$, $f : A \to B$, $p = f(q)$, etc.

En el orden, la simbología anterior se lee: "y es igual a efe de x", "el conjunto de pares ordenados x, efe de x", "efe es una función de A en B", "p es función de q".

EJEMPLOS

Con las siguientes expresiones determine cuál es función y cuando lo sea exprésela en diferente notación.

1) $3x^2 + 6y^2 = 18$

2) $2x + 4y - 1 = 3 + y$

3) $y^3 + 2x^2 = x - 1$

4) $xy + 2x - 1 = x^2$

5) $sen^2 x + \cos^2 x = y + 2x$

<u>Solución</u>

1) $3x^2 + 6y^2 = 18$

Despejando " y " se tiene: $6y^2 = 18 - 3x^2$

$$y^2 = \frac{18 - 3x^2}{6} = 3 - \frac{1}{2}x^2$$

$$y = \pm\sqrt{3 - \frac{1}{2}x^2}$$

Esta última expresión nos indica que para cada valor que se pueda asignar a la variable " x ", se obtienen dos valores para la variable " y ", lo cual se contrapone con la definición de función y por lo tanto es una **relación**.

2) $2x + 4y - 1 = 3 + y$

Procediendo de la misma manera: trasladando las " y " al primer miembro y los términos que no contienen a " y " al segundo miembro: $4y - y = 3 + 1 - 2x$

Simplificando: $3y = -2x + 4$, despejando a la $y = \dfrac{-2x + 4}{3}$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

Esta última expresión es una **función**, ya que para cada valor asignado a la variable " x ", se obtiene uno solo para la variable " y ", lo cual cumple con la definición. Diferentes formas de expresarla en el orden anterior son:

$y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$, $\left(x, -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\right)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$, $p = -\frac{2}{3}q + \frac{4}{3}$

3) $y^3 + 2x^2 = x - 1$

$y^3 = -2x^2 + x - 1$

$y = \sqrt[3]{-2x^2 + x - 1}$

Esta última expresión es una **función**, ya que para cada valor asignado a la v.i. "x" se obtiene uno solo para la variable "y" (v.d.), otras representaciones son:

$y = \sqrt[3]{-2x^2 + x - 1}$, $\left(x, \sqrt[3]{-2x^2 + x - 1}\right)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = \sqrt[3]{-2x^2 + x - 1}$

$p = \sqrt[3]{-2q^2 + q - 1}$

4) $xy + 2x - 1 = x^2$

$xy = x^2 - 2x + 1$

$y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x}$

$y = x - 2 + \dfrac{1}{x}$

Esta última expresión es una **función**, ya que para cada valor asignado a "x" se obtiene uno solo para la variable "y", otras representaciones son:

$y = x - 2 + \dfrac{1}{x}$, $\left(x, x - 2 + \dfrac{1}{x}\right)$, $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x}$

$p = q - 2 + \dfrac{1}{q}$

5) $sen^2 x + \cos^2 x = y + 2x$

Por la identidad trigonométrica Pitagórica, $sen^2 x + \cos^2 x = 1$, se tiene:

$1 = y + 2x$

$y = 1 - 2x$, **es función**, sus representaciones son:

$y = 1 - 2x$, $(x, 1 - 2x)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = 1 - 2x$, $p = 1 - 2q$

EJERCICIOS

Con las siguientes expresiones determine cuál es función y cuando lo sea exprésela en diferente notación.

1) $xy = 1$

2) $x^2 + y^2 - 2xy - 1 = 0$

3) $\log x^y = 4$

4) $3x^2 + 3y^2 = 6$

5) $x^2 + y\cos 2x = 4$

1.4. DOMINIO Y RANGO

En las funciones reales de una variable real, con frecuencia solo se da la regla de correspondencia en forma de ecuación algebraica $y = f(x)$, sin especificar cual es su Dominio, dando lugar esto a obtener lo que se conoce como Dominio natural de una función.

Definición:

Dominio natural de una función real de variable real, son todos los valores reales que puede asignársele a la "x" (v.i.), de tal modo que la "y" (v.d.) resulte un único número real.

Rango o Imagen de una función real de variable real, son todos los valores reales que se obtuvieron para "y" (v.d.) a través de su regla de correspondencia $f(x)$.

Notación: El dominio se representará con la letra "D" y el rango o imagen con la letra "R".

EJEMPLOS

Obtener el Dominio natural y el Rango de las siguientes funciones reales de variable real dadas por su regla de correspondencia.

1) $f(x) = 2x - 5$

2) $f(x) = 3 + \dfrac{2}{x}$

3) $f(x) = -4\sqrt{5 - 2x}$

4) $f(x) = 2x^2 + 6x$

5) $f(x) = 2\ln(x - 2) + 1$

Solución

1) $f(x)=2x-5$

Observe que en este ejemplo, la función es un polinomio de primer grado, donde la variable "x" puede tomar cualquier número real sin problema para que la variable "y" resulte también un número real, por lo que el dominio y el rango son respectivamente todos los reales, o sea: $D=\mathbb{R}$ y $R=\mathbb{R}$, recordar que $y=f(x)$.

2) $f(x)=3+\frac{2}{x}$

Cuando una función contiene una fracción como en este ejemplo $\frac{2}{x}$, el dominio quedará restringido para aquellos números reales que anulen el denominador (en este caso, cuando $x=0$) por lo que $D=\mathbb{R}-\{0\}$ lo cual también se puede escribir como unión de intervalos, o sea $D=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. Por lo que respecta a la obtención del rango, de la función original podemos despejar la "x", $x=\frac{2}{y-3}$ observando que la "y" puede tomar cualquier número real excepto el 3 por lo que $R=\mathbb{R}-\{3\}$ ó también $R=(-\infty,3)\cup(3,\infty)$.

3) $f(x)=-4\sqrt{5-2x}$

Cuando una función contiene radicales con índice <u>par</u> como en este ejemplo, deberá tenerse cuidado que en el subradical $5-2x$ la variable "x" no podrá tomar valores reales que hagan que $5-2x$ sea negativo, esto nos obliga a que $5-2x\geq 0$ (el subradical sea no negativo). Resolviendo esta última desigualdad, se tiene $5\geq 2x$ ó $2x\leq 5$, $x\leq\frac{5}{2}$ este resultado nos indica que la variable "x" puede tomar cualquier valor real menor o igual a $\frac{5}{2}$, por lo que $D=\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$. Para la obtención del rango, podemos razonar de la siguiente manera:

- Observando la función original $f(x)=-4\sqrt{5-2x}$, una vez que ya determinamos el dominio de esta función, se tiene que el radical siempre será no negativo $\sqrt{5-2x}\geq 0$.

- El coeficiente -4 convierte en negativo o cero a todos los valores del radical, por lo que el rango de esta función serán todos los números reales menores o iguales que cero, o sea $R=(-\infty,0]$.

4) $f\left(x\right)=2x^2+6x$

Esta función es un polinomio de segundo grado y por la misma razón que en el ejemplo **1)**, tanto su dominio y rango son todos los números reales. Podemos decir que siempre que tengamos una función polinomial, su dominio y rango son todos los números reales.

$$D=\left(-\infty,\infty\right) \quad ; \quad R=\left(-\infty,\infty\right)$$

o bien $D=\mathbb{R}$; $R=\mathbb{R}$

5) $f(x)=2\ln(x-2)+1$

Se sabe que el argumento de un logaritmo no puede ser negativo ni cero, por lo que se obliga que $x-2>0$ resultando que $x>2$ entonces el dominio son todos los números reales mayores estrictamente que 2 o sea $D=\left(2,\infty\right)$.

Con respecto de su rango, despejando a la variable "x" se obtiene $y=2\ln(x-2)+1$; $\dfrac{y-1}{2}=\ln(x-2)$. Por definición de logaritmo se tiene: $e^{\frac{y-1}{2}}=\left(x-2\right)$; $x=e^{\frac{1}{2}(y-1)}+2$.

En esta última expresión observamos que la variable "y" puede tomar cualquier valor real, resultando que la "x" sea mayor que 2, por lo que el rango es $R=\left(-\infty,\infty\right)$.

EJERCICIOS

Obtener el Dominio natural y el Rango de las siguientes funciones reales de variable real dadas por su regla de correspondencia.

1) $2x+3y+1=0$

2) $f\left(x\right)=2\left(x-1\right)^2+3$

3) $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{2x-1}}$

4) $f\left(x\right)=2\ln\left(x^2+2\right)-1$

5) $f(x)=4x^2+4x+1$

1.5. GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Definición:

La gráfica de una función real de variable real puede representarse por el conjunto de puntos del plano (x, y) cuyas coordenadas cumplen que la variable "x" pertenece al Dominio de la función y la $y = f(x)$.

- La gráfica de una función real de variable real es uno de los subconjuntos del producto cartesiano $\mathbb{R}x\mathbb{R}$.

- Los puntos (x, y) que forman la gráfica de la función son todos aquellos que su primera coordenada "x" es elemento del Dominio y su segunda coordenada "y" es la imagen correspondiente de esa "x" aplicando la regla de correspondencia $f(x)$.

- Cuando se grafica una función, y su Dominio es todo el conjunto de los números reales, se recomienda dar algunos valores negativos, el cero y algunos positivos a la v.i. "x" para obtener los correspondientes valores de la v.d. "y", después se representan sobre el plano coordenado cartesiano y mediante línea continua uniendo estos puntos se obtiene solo una parte de la gráfica de la función.

- En adelante, siempre trataremos con funciones reales de variable real y solo las mencionaremos como funciones, a la vez, indistintamente escribiremos su regla de correspondencia como por ejemplo $y = 2x^2 + 2$ o bien $f(x) = 2x^2 + 2$ y diremos Dominio en vez de Dominio natural.

<u>**Nota:**</u> Entre más puntos se calculen, más idea se tendrá de la gráfica y más adelante se aprenderán formas más eficientes de trazar gráficas de funciones.

EJEMPLOS

1) $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 3$

2) $y = 2\sqrt{x-1} + 1$

3) $y = \frac{-2}{x+1} + 1$

4) $y = 2e^{x+1} + 1$

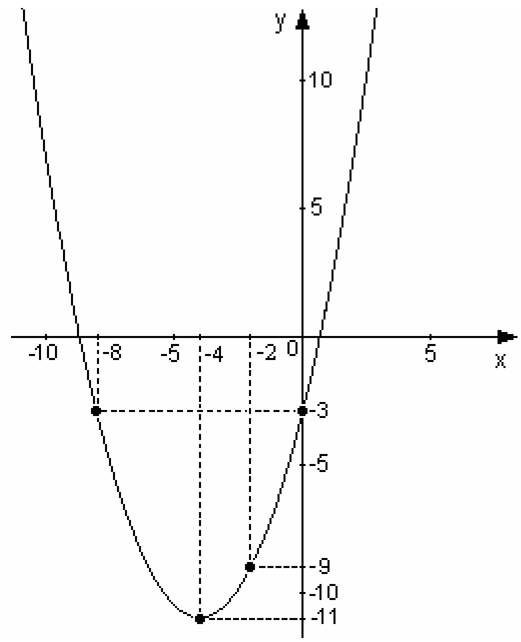
5) $y = 2senx$

Solución

1) $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 3$

Como el dominio de esta función son todos los reales $D = (-\infty, \infty)$ tabulamos algunos números como se muestra:

x	y
-8	-3
-4	-11
-2	-9
0	-3
4	21

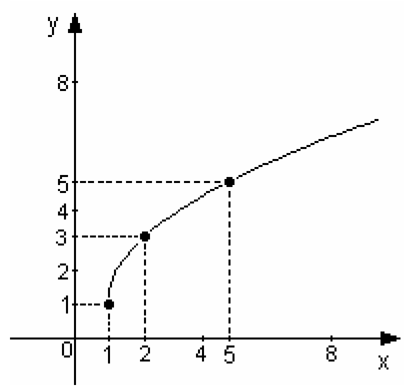


Localizando estos puntos en el plano coordenado y uniéndolos con línea continua dibujamos solo una parte de la gráfica.

2) $y = 2\sqrt{x-1} + 1$

Como el dominio de esta función son todos los reales desde 1 hasta infinito, o sea: $D = [1, \infty)$, tabulamos algunos números como se muestra:

x	y
1	1
2	3
5	5



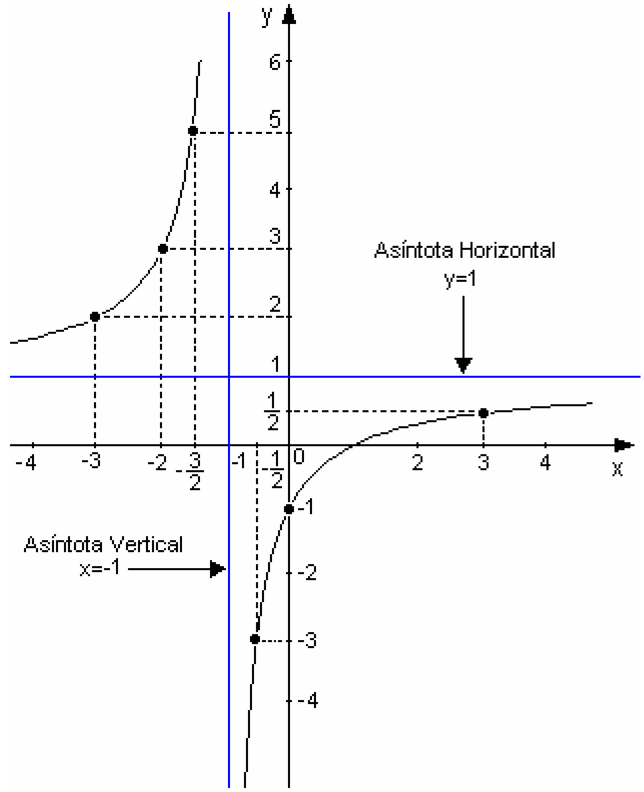
Localizando estos puntos en el plano coordenado y uniéndolos con línea continua trazamos su gráfica.

3) $y = \frac{-2}{x+1} + 1$

El dominio de esta función son todos los reales excepto el -1, como sigue: $D = \mathbb{R} - \{-1\}$ o bien $D = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$, tabulando algunos números como se muestra:

x	y
-3	2
-2	3
$-\frac{3}{2}$	5
$-\frac{1}{2}$	-3
0	-1
3	$\frac{1}{2}$

Localizando estos puntos en el plano coordenado y uniéndolos con línea continua trazamos su gráfica.

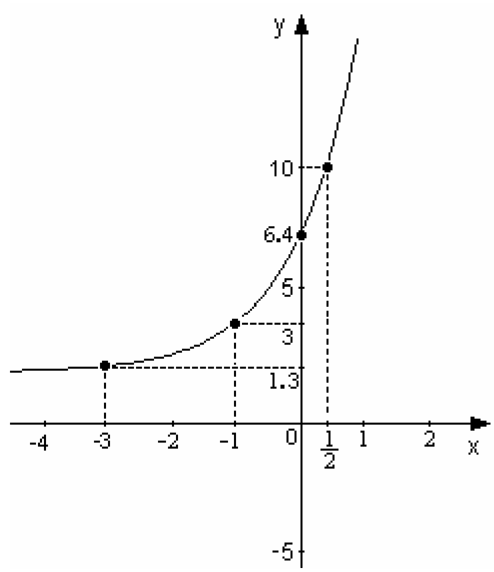


<u>Nota:</u> Obsérvese que en la gráfica de esta función, las <u>rectas</u> $y=1$ y $x=-1$ son <u>asíntotas</u> de la curva, conceptos que más adelante se tratarán con detalle.

4) $y = 2e^{x+1} + 1$

Como el dominio de esta función son todos los reales $D = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ tabulamos algunos números como se muestra:

x	y
-3	1.3
-1	3
0	6.4
$\frac{1}{2}$	10

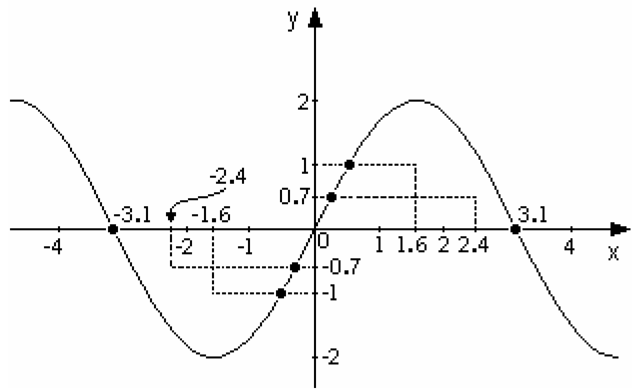


Localizando estos puntos en el plano coordenado y uniéndolos con línea continua trazamos la gráfica.

5) $y = 2senx$

Como el dominio de esta función son todos los reales $D = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ tabulamos algunos números como se muestra:

x	y
-3.1	0
-2.4	-0.7
-1.6	-1
1.6	1
2.4	0.7
3.1	0



Localizando estos puntos en el plano coordenado y uniéndolos con línea continua trazamos la gráfica.

EJERCICIOS

1) $y = 3x^2 + x - 1$

2) $y = 2e^{-x+1}$

3) $y = \sqrt{4x + 4}$

4) $y = \dfrac{x+2}{x-2}$

5) $y = \dfrac{1}{2}\cos(3x)$

1.6. FUNCIONES INYECTIVAS, SUPRAYECTIVAS Y BIYECTIVAS

Inyectivas. Sean las funciones que, a elementos distintos del Dominio, les corresponden elementos distintos del Codominio y recíprocamente, por ejemplo $y = 2x$, $y = \sqrt{x}$.
(Todo o solo una parte del Codominio es el rango de la función).

Suprayectivas. Son las funciones que, si todo elemento del Codominio es imagen de por lo menos un elemento del Dominio. Por ejemplo $y = x^3 + x^2$ (todo el Codominio es el rango de la función).

Biyectivas. Si una función cumple con ser inyectiva y suprayectiva, entonces es biyectiva y su regla de correspondencia es biunívoca o uno a uno. Describiendo esta clase de función en su forma gráfica significa que trazando tanto rectas verticales como horizontales por todo su dominio y todo su rango respectivamente, solo se cruzará un solo punto de la gráfica de la función.

Visualizar una función en forma gráfica es de gran ayuda en matemáticas y en cualquier otra rama de la ciencia ya que puede ser la clave para la solución de problemas y para su estudio en general.

EJEMPLOS

Trazar la gráfica de las siguientes funciones y decir si son inyectivas, suprayectivas, biyectivas o ninguna de las anteriores:

1) $f(x)=x^2+3$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

2) $f(x)=-2x+4$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

3) $f(x)=\sqrt{x-1}$; $f:[1,\infty)\to[0,\infty)$

4) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$; $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}$

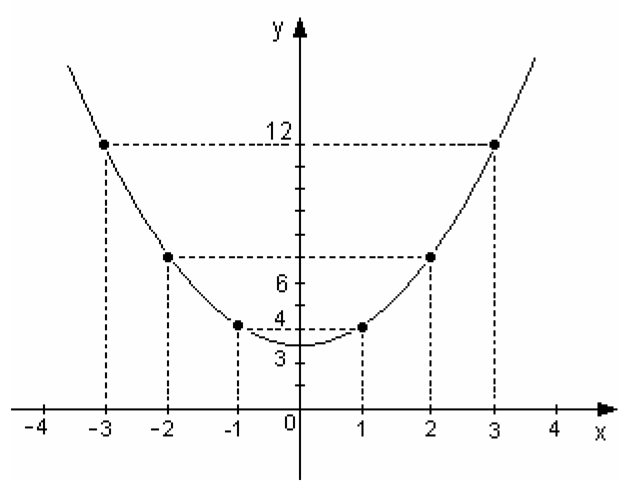
5) $f(x)=\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}}$; $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}$

Solución

1) $f(x)=x^2+3$

Como el Dominio de la función es el conjunto de los números reales: $D=(-\infty,\infty)$. De acuerdo con la recomendación anterior, se eligen algunos números reales, negativos, el cero y positivos (por facilidad de cálculo sólo se utilizarán números enteros).

x	y
-3	12
-2	7
-1	4
0	3
1	4
2	7
3	12



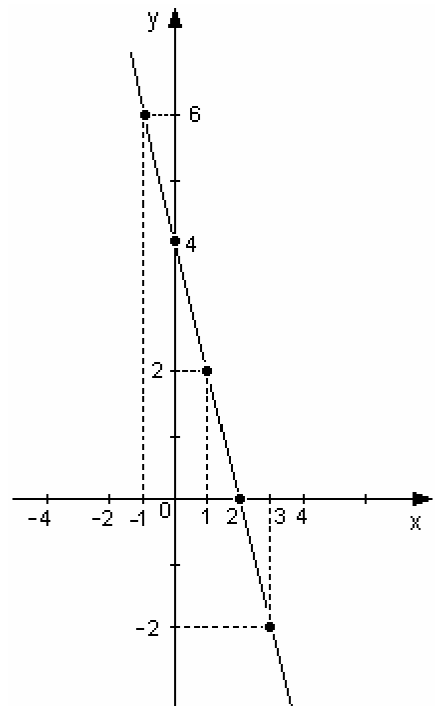
Ubicando cada punto de la tabla anterior sobre el plano coordenado y uniendo estos puntos con línea continua se obtiene la gráfica como se muestra arriba.

Esta función no cumple con ninguna de las definiciones anteriores de ser inyectiva, suprayectiva o biyectiva.

2) $f(x) = -2x + 4$

El Dominio es $D = (-\infty, \infty)$ y el Rango es $R = \mathbb{R}$

x	y
-1	6
0	4
1	2
2	0
3	-2

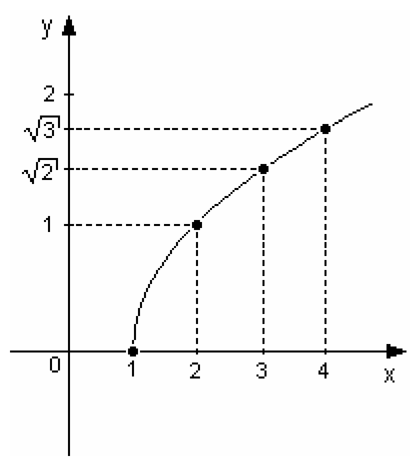


Esta función cumple con ser inyectiva, suprayectiva y por lo tanto es biyectiva.

3) $f(x) = \sqrt{x-1}$

El Dominio es: $D = [1, \infty)$ y el Rango $R = [0, \infty)$

x	y
1	0
2	1
3	$\sqrt{2}$
4	$\sqrt{3}$
5	2

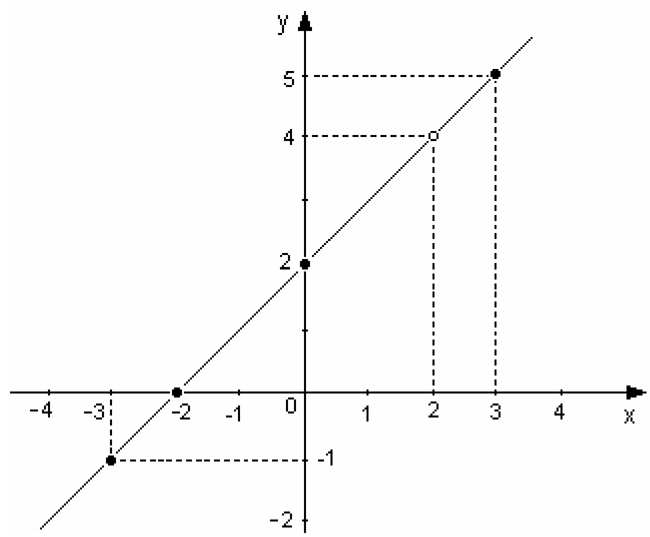


Esta función es inyectiva.

4) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

El Dominio es: $D=\mathbb{R}-\{2\}$ o bien $D=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$ y el Rango $R=\mathbb{R}-\{4\}$

x	y
-3	-1
-2	0
0	2
2	4
3	5

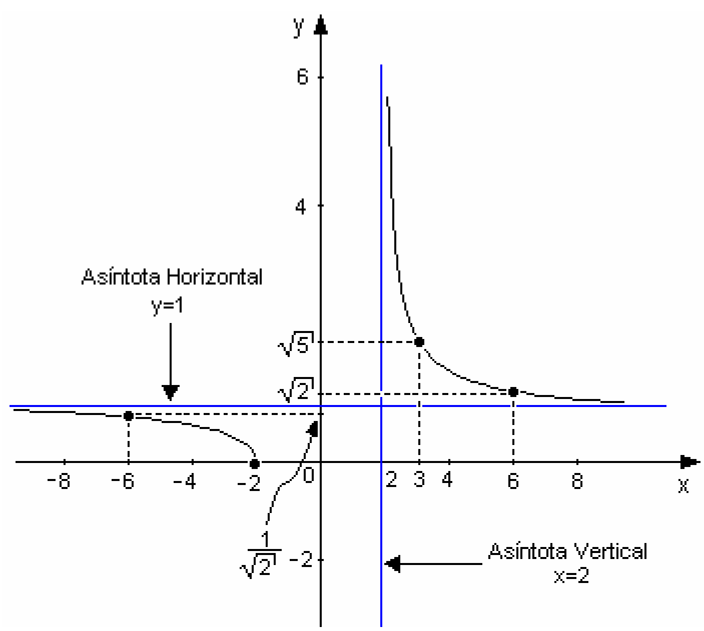


Es una función inyectiva.

5) $f(x)=\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}}$

Como el Dominio de la función es $D=(-\infty,-2]\cup(2,\infty)$. De acuerdo con la recomendación anterior, se eligen algunos números reales, negativos y positivos (en este caso no se dio el valor de 2 a "x", porque no existe el valor de "y").

x	y
-6	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
-2	0
3	$\sqrt{5}$
6	$\sqrt{2}$



Esta función es inyectiva.

EJERCICIOS

Trazar la gráfica de las siguientes funciones y decir si son inyectivas, suprayectivas, biyectivas o ninguna de las anteriores:

1) $f(x)=-2(x+1)^2-3$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$; $f:\mathbb{R}-\{2\}\to[3,\infty)$

3) $f(x)=\sqrt{4x-4}$; $f:[1,\infty)\to[0,\infty)$

4) $f(x)=2(x-2)+2$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

5) $f(x)=x^2$; $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$

1.7. FUNCIÓN INVERSA

Definición:

Si $f(x)$ representa una función inyectiva o biyectiva, entonces su inversa es la función $f^{-1}(x)$ si se cumple con la siguiente condición: $(x,y)\in f(x)$ si y solo si $(y,x)\in f^{-1}(x)$.

Notas:

- En la notación $f^{-1}(x)$, el exponente no funciona como tal, no lo es una forma convenida de denotar la inversa de una función.
- La definición indica que el Dominio de $f(x)$ es el Rango de $f^{-1}(x)$ y el Rango de $f(x)$ es el Dominio de $f^{-1}(x)$.
- También la definición indica que, para que la inversa de una función sea también una función, es necesario que la función original $f(x)$ sea inyectiva o biyectiva.
- También es posible obtener inversas de funciones que no son inyectivas ni biyectivas, resultando que estas últimas no sean funciones.
- La regla de correspondencia de la inversa de una función se puede obtener despejando "x" de la función original $y=f(x)$, obteniendo $x=f(y)$, luego se sustituye en esta última la "x" por la "y" y la "y" por la "x", quedando finalmente $y=f^{-1}(x)$ su inversa.

EJEMPLOS

Obtener la inversa de cada una de las siguientes funciones cuyo Dominio se especifica.

1) $f(x)=3x-2$; $D=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2$; $D=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\sqrt{x+2}+1$; $D=(-2,\infty)$

5) $f(x)=2\ln(x-1)$; $D=(1,\infty)$

4) $f(x)=\dfrac{-2}{x+1}$; $D=\mathbb{R}-\{-1\}$

<u>Solución</u>

1) $f(x)=3x-2$

Esta función es polinomial de primer grado, por lo que su dominio es el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$). Al tabular daremos algunos valores negativos, el cero y algunos positivos.

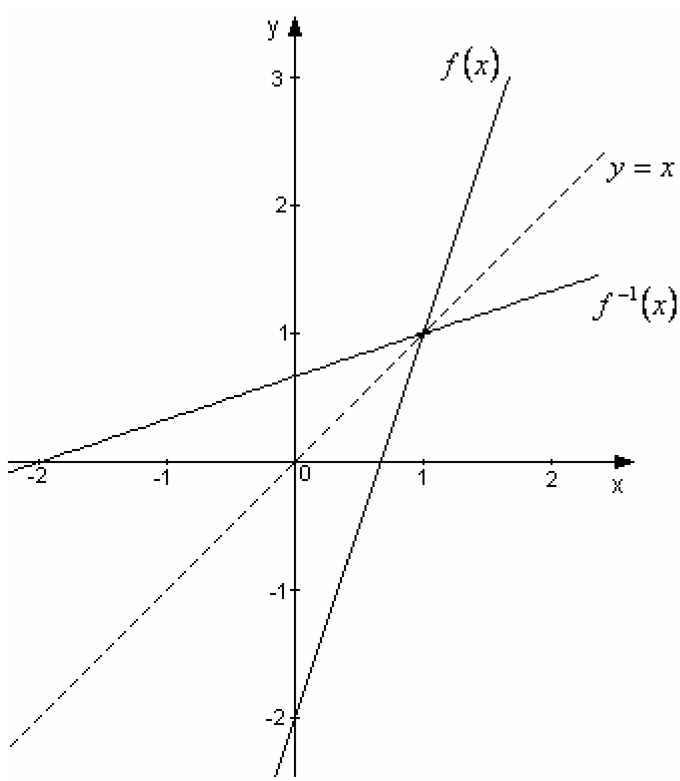
$f(x)=3x-2$

x	y
-3	-11
-2	-8
-1	-5
0	-2
1	1
2	4
3	7

La inversa de la función $f(x)=3x-2$, la obtenemos cambiando la "x" por la "y" y la "y" por la "x" como sigue: $x=3y-2$. Despejando la variable "y" se tiene: $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$. Que es la inversa $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$, cuyas gráficas se muestran en la figura, observando que son simétricas respecto a la recta $y=x$.

$f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

x	y
-11	-3
-8	-2
-5	-1
-2	0
1	1
4	2
7	3



2) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$

El dominio es el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) y el rango es el conjunto $[2,\infty)$.

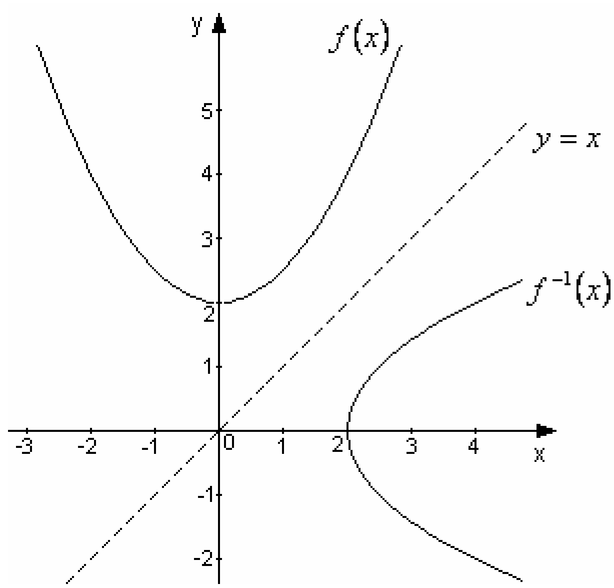
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$

x	y
±3	$\frac{13}{2}$
±2	4
±1	$\frac{5}{2}$
0	2

La inversa de la función, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ la obtenemos cambiando la "x" por la "y" y la "y" por la "x" como sigue: $x = \frac{1}{2}y^2 + 2$. Despejando la variable "y" se tiene: $y = \pm\sqrt{2x-4}$. Que es la inversa $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{2x-4}$ que no es función, cuyas gráficas se muestran en la figura, observando que son simétricas respecto a la recta $y = x$.

$f^{-1}(x) = \pm\sqrt{2x-4}$

x	y
$\frac{13}{2}$	±3
4	±2
$\frac{5}{2}$	±1
2	0



3) $f(x) = \sqrt{x+2} + 1$

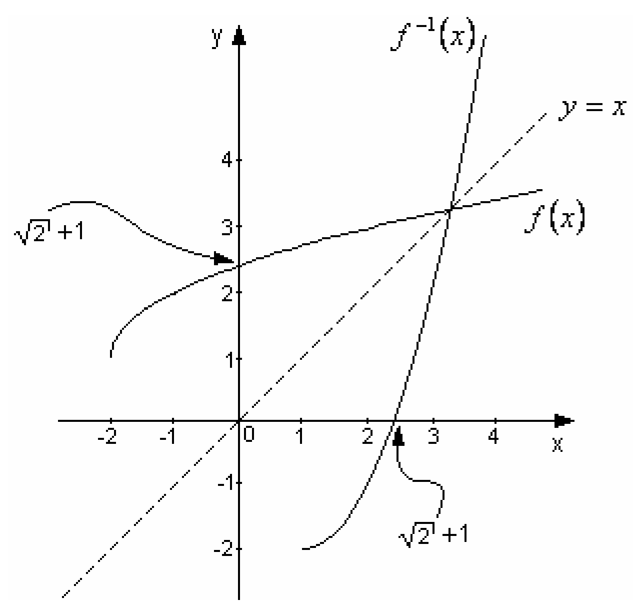
Siguiendo el mismo procedimiento:

$f(x) = \sqrt{x+2} + 1$

x	y
−2	1
−1	2
0	$\sqrt{2}+1$
1	$\sqrt{3}+1$
2	3

$f^{-1}(x) = (x-1)^2 - 2$

x	y
1	−2
2	−1
$\sqrt{2}+1$	0
$\sqrt{3}+1$	1
3	2



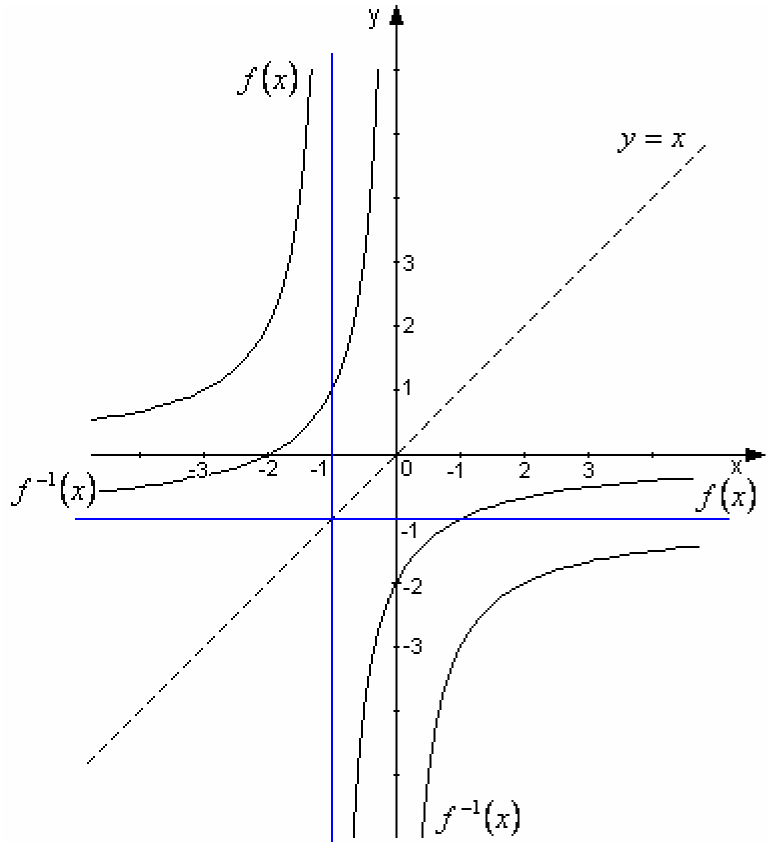
4) $f(x)=\dfrac{-2}{x+1}$

$f(x)=\dfrac{-2}{x+1}$

x	y
-3	1
-2	2
$-\frac{3}{2}$	4
$-\frac{1}{2}$	-4
0	-2
1	-1
2	$-\frac{2}{3}$
3	$-\frac{1}{2}$

$f^{-1}(x)=-1-\dfrac{2}{x}$

x	y
1	-3
2	-2
4	$-\frac{3}{2}$
-4	$-\frac{1}{2}$
-2	0
-1	1
$-\frac{2}{3}$	2
$-\frac{1}{2}$	3



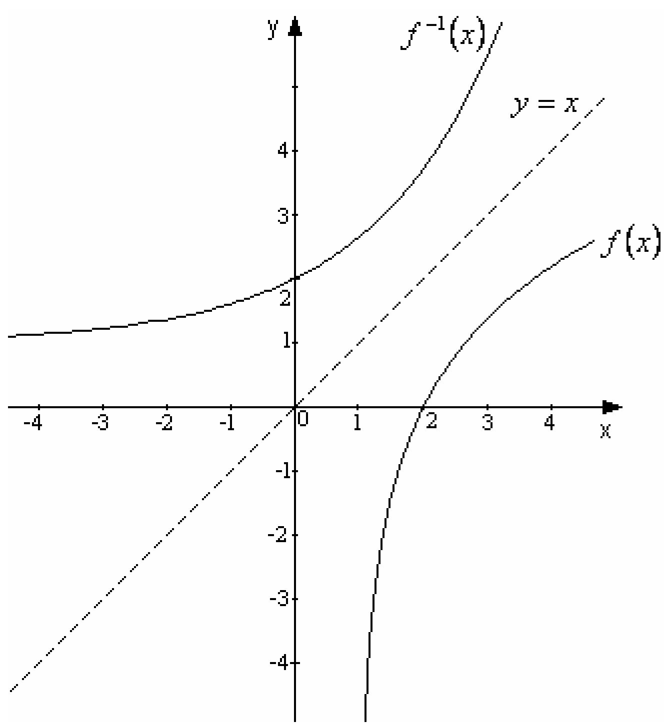
5) $f(x)=2\ln(x-1)$

$f(x)=2\ln(x-1)$

x	y
3	1.4
2	0
4	2.2

$f^{-1}(x)=e^{\frac{1}{2}x}+1$

x	y
1.4	3
0	2
2.2	4



EJERCICIOS

Para cada una de las siguientes funciones, obtenga su inversa.

1) $f(x) = 4x - 1 \quad ; \quad D = \mathbb{R}$

2) $f(x) = x^3 \quad ; \quad D = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \sqrt{-1 - x} \quad ; \quad D = (-\infty, -1]$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1} \quad ; \quad D = \mathbb{R}$

5) $f(x) = 2^x \quad ; \quad D = \mathbb{R}$