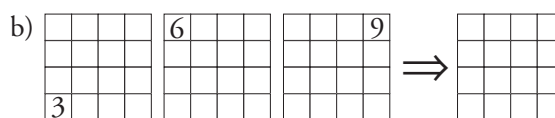
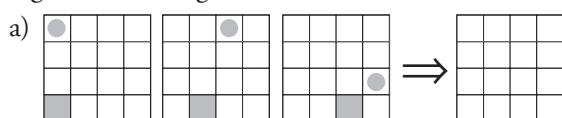




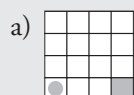
1. Sucesiones

PIENSA Y CALCULA

Sigue las series siguientes:



Solución:



APLICA LA TEORÍA

1 Halla los diez primeros términos de las siguientes sucesiones:

- a) 3, 8, 13, 18... b) 8, 4, 0, -4...
c) 2, -2, 2, -2... d) $1/2, 1/4, 1/6, 1/8...$

Solución:

- a) 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48
b) 8, 4, 0, -4, -8, -12, -16, -20, -24, -28
c) 2, -2, 2, -2, 2, -2, 2, -2, 2, -2
d) $1/2, 1/4, 1/6, 1/8, 1/10, 1/12, 1/14, 1/16, 1/18, 1/20$

2 Halla los diez primeros términos de las siguientes sucesiones:

- a) 2, 1, 2, 4, 2, 7... b) 1, 1, 2, 3, 5, 8...
c) 2, 1, 4, 3, 6, 5... d) 1, -2, 4, -8...

Solución:

- a) 2, 1, 2, 4, 2, 7, 2, 10, 2, 13
b) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55
c) 2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, 10, 9
d) 1, -2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256, -512

3 Calcula los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:

- a) $a_n = 3n + 2$ b) $a_n = (n + 1)^2$
c) $a_n = 3 \cdot 2^n$ d) $a_n = (-2)^n$

Solución:

- a) 5, 8, 11, 14
b) 4, 9, 16, 25
c) 6, 12, 24, 48
d) -2, 4, -8, 16

4 Halla los cuatro primeros términos positivos de las sucesiones siguientes y trata de hallar mentalmente la fórmula del término general.

- a) Números pares. b) Números impares.
c) Múltiplos de 5 d) Cubos perfectos.

Solución:

- a) $2, 4, 6, 8 \Rightarrow a_n = 2n$
b) $1, 3, 5, 7 \Rightarrow a_n = 2n - 1$
c) $5, 10, 15, 20 \Rightarrow a_n = 5n$
d) $1, 8, 27, 64 \Rightarrow a_n = n^3$

2. Progresiones aritméticas

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente la suma de los 100 primeros números naturales. Observa que la suma de los términos equidistantes de los extremos son iguales.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$
$$1 + 100 = 101, \quad 2 + 99 = 101, \quad 3 + 98 = 101 \dots$$

Solución:

$$101 \cdot 50 = 5\,050$$

APLICA LA TEORÍA

5 Encuentra el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

- a) 5, 9, 13, 17... b) 6, 3, 0, -3...
c) $2/3, 1/3, 0, -1/3 \dots$ d) $1/2, 1, 3/2, 2 \dots$

Solución:

- a) $a_1 = 5, d = 4$
 $a_n = 5 + 4(n - 1) = 4n + 1$
b) $a_1 = 6, d = -3$
 $a_n = 6 - 3(n - 1) = -3n + 9$
c) $a_1 = 2/3, d = -1/3$
 $a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(n - 1) = 1 - \frac{n}{3}$
d) $a_1 = 1/2, d = 1/2$
 $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n - 1) = \frac{n}{2}$

6 Escribe el término general y los tres primeros términos de la progresión aritmética cuyo primer término es $a_1 = 6$ y $d = 2,5$

Solución:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$
$$a_n = 6 + 2,5(n - 1) = 2,5n + 3,5$$

6; 8,5; 11

7 En la progresión 5, 9, 13, 17..., ¿qué término vale 49?

Solución:

$$a_1 = 5, d = 4$$
$$a_n = 4n + 1$$
$$4n + 1 = 49 \Rightarrow n = 12$$

8 En una progresión aritmética conocemos los términos $a_5 = 19$ y $a_8 = 28$. Calcula la diferencia y el primer término.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + 4d = 19 \\ a_1 + 7d = 28 \end{array} \right\}$$

Restando a la 2ª ecuación la 1ª:

$$3d = 9 \Rightarrow d = 3$$
$$a_1 + 4 \cdot 3 = 19 \Rightarrow a_1 = 7$$

9 Calcula la suma de los 25 primeros términos de la progresión aritmética cuyo término general es:

$$a_n = 2n + 6$$

Solución:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$
$$a_1 = 2 + 6 = 8$$
$$a_{25} = 50 + 6 = 56$$
$$S = \frac{8 + 56}{2} \cdot 25 = 800$$

10 Calcula la suma de los 12 primeros términos de la progresión aritmética cuyo término general es:

$$a_n = 3n/2 + 2$$

Solución:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$
$$a_1 = 3/2 + 2 = 7/2$$
$$a_{12} = 18 + 2 = 20$$
$$S = \frac{7/2 + 20}{2} \cdot 12 = 141$$

3. Progresiones geométricas

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente los dos términos siguientes de cada una de estas sucesiones:

- a) 3, 6, 12, 24... b) 20, 10, 5, 5/2... c) 3, 3, 3, 3... d) 5, -5, 5, -5...

Solución:

- a) 48, 96 b) 5/4, 5/8 c) 3, 3 d) 5, -5

APLICA LA TEORÍA

- 11** Encuentra el término general de las siguientes progresiones geométricas:

- a) 5, 15, 45, 135... b) 6, 3, 3/2, 3/4...

Solución:

- a) $a_1 = 5, r = 3 \Rightarrow a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$
 b) $a_1 = 6, r = 1/2 \Rightarrow a_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

- 12** Dada una progresión geométrica cuyo primer término es $a_1 = 4$ y la razón $r = 5$, calcula:

- a) a_6 b) a_{10} c) a_n

Solución:

- a) $a_6 = 4 \cdot 5^5$ b) $a_{10} = 4 \cdot 5^9$ c) $a_n = 4 \cdot 5^{n-1}$

- 13** En la progresión geométrica 2, 4, 8, 16, 32..., ¿qué término vale 1 024?

Solución:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, r = 2 \text{ y } a_n = 2 \cdot 2^{n-1} \\ 2 \cdot 2^{n-1} &= 1\,024 \\ 2^n &= 2^{10} \\ n &= 10 \end{aligned}$$

- 14** Encuentra la razón de la progresión geométrica que tiene $a_4 = 135$ y $a_6 = 1\,215$

Solución:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot r^3 &= 135 \\ a_1 \cdot r^5 &= 1\,215 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} a_1 \cdot r^3 &= 135 \\ a_1 \cdot r^5 &= 1\,215 \end{aligned}} \right\}$$

Dividiendo la 2ª ecuación entre la 1ª:

$$r^2 = 9 \Rightarrow r = \pm 3$$

- 15** Calcula la suma de los 10 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas:

- a) 2, 14, 98, 686... b) 3, -6, 12, -24...

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } a_1 &= 2, r = 7, a_{10} = 2 \cdot 7^9 \\ S_{10} &= \frac{2 \cdot 7^9 \cdot 7 - 2}{7 - 1} = 94\,158\,416 \\ \text{b) } a_1 &= 3, r = -2, a_{10} = 3 \cdot (-2)^9 \\ S_{10} &= \frac{3 \cdot (-2)^9 \cdot (-2) - 3}{(-2) - 1} = -1\,023 \end{aligned}$$

- 16** Calcula la suma de los infinitos términos de las siguientes progresiones geométricas:

- a) 1/5, 1/25, 1/125, 1/625...
 b) 3, 2, 4/3, 8/9, 16/27...

Solución:

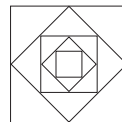
$$\begin{aligned} \text{a) } a_1 &= 1/5, r = 1/5 \Rightarrow |1/5| < 1 \Rightarrow S = \frac{1/5}{1 - 1/5} = 1/4 \\ \text{b) } a_1 &= 3, r = 2/3 \Rightarrow |2/3| < 1 \Rightarrow S = \frac{3}{1 - 2/3} = 9 \end{aligned}$$

- 17** La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es 6 y su primer término es 4. Halla la razón.

Solución:

$$\frac{4}{1 - r} = 6 \Rightarrow r = 1/3$$

- 18** Si en un cuadrado de área 8 m^2 se unen los puntos medios, se obtiene otro cuadrado, y así sucesivamente. Calcula la sucesión de las áreas de dichos cuadrados. ¿Qué tipo de progresión es?



Solución:

8, 4, 2, 1... Es una progresión geométrica decreciente de razón: $r = 1/2$

4. Aplicaciones: interés simple y compuesto

PIENSA Y CALCULA

Si se depositan en una libreta de ahorro 1 000 € y se paga un 5% de interés anual, ¿cuánto dinero producen al cabo de un año?

Solución:

50 €

APLICA LA TEORÍA

- 19** En un depósito de una entidad financiera ofrecen un 6% de interés simple anual. Si se depositan 7 500 € durante 2 años y Hacienda retiene el 18%, calcula el capital acumulado al finalizar el período.

Solución:

Tanto por uno final: $0,06 \cdot 0,82 = 0,0492$

$$I = c \cdot r \cdot t$$

$$I = 7\,500 \cdot 0,0492 \cdot 2 = 738 \text{ €}$$

$$C = 7\,500 + 738 = 8\,238 \text{ €}$$

- 20** Calcula los años que ha estado depositado un capital de 5 000 € al 3,5% de interés si se han generado 700 € de intereses, sin el descuento de Hacienda.

Solución:

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow t = \frac{I}{c \cdot r}$$

$$t = \frac{700}{5\,000 \cdot 0,035} = 4 \text{ años}$$

- 21** Calcula el rédito al que se han depositado 18 000 € a interés simple durante 5 años si, una vez retenido el 18% de Hacienda, los intereses generados son de 2 952 €

Solución:

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow r = \frac{I}{c \cdot t}$$

$$r = \frac{2\,952}{18\,000 \cdot 5} = 0,0328$$

El rédito bruto:

$$r = 0,0328 : 0,82 = 0,04 \Rightarrow R = 4\%$$

- 22** Se depositan 6 500 € al 5% de interés compuesto durante 4 años. Hacienda retiene el 18% de los intereses cuando se recupera el capital. Calcula el capital final si los intereses se abonan anualmente.

Solución:

$$C = c(1 + r)^t \Rightarrow C = 6\,500 \cdot 1,05^4 = 7\,900,79 \text{ €}$$

$$\text{Los intereses son: } 7\,900,79 - 6\,500 = 1\,400,79 \text{ €}$$

$$\text{Hacienda retiene: } 1\,400,79 \cdot 0,18 = 252,14 \text{ €}$$

El capital final neto será:

$$7\,900,79 - 252,14 = 7\,648,65 \text{ €}$$

- 23** Se depositan 35 500 € al 4% de interés compuesto con abono de intereses diarios durante 2 años. Calcula el capital final si Hacienda retiene el 18% al finalizar el plazo.

Solución:

$$C = c \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$$

$$C = 35\,500 \left(1 + \frac{0,04}{360}\right)^{360 \cdot 2} = 38\,456,52 \text{ €}$$

$$\text{Los intereses son: } 38\,456,52 - 35\,500 = 2\,956,52 \text{ €}$$

$$\text{Hacienda retiene: } 2\,956,52 \cdot 0,18 = 532,17 \text{ €}$$

El capital final neto será:

$$38\,456,52 - 532,17 = 37\,924,35 \text{ €}$$

- 24** ¿Qué capital inicial es necesario para que, a interés compuesto durante 4 años al 5% anual y con períodos de capitalización anuales, se acumule un capital final de 15 558,48 €?

Solución:

$$C = c(1 + r)^t \Rightarrow c = \frac{C}{(1 + r)^t} \Rightarrow c = \frac{15\,558,48}{1,05^4}$$

$$c = 12\,800 \text{ €}$$

Ejercicios y problemas

1. Sucesiones

25 Escribe los seis primeros términos de las siguientes sucesiones:

- a) 1, 9, 17, 25...
- b) 2, -4, 8, -16...
- c) Los múltiplos de 5
- d) Los inversos de los cuadrados de los números naturales.

Solución:

- a) 1, 9, 17, 25, 33, 41
- b) 2, -4, 8, -16, 32, -64
- c) 0, 5, 10, 15, 20, 25
- d) 1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25, 1/36

26 Halla los diez primeros términos de las siguientes sucesiones:

- a) $x, 2x, 4x, 8x, \dots$
- b) 1, 3, 4, 3, 9...
- c) 3, 3, 6, 9, 15...
- d) El triple de los números naturales.

Solución:

- a) $x, 2x, 4x, 8x, 16x, 32x, 64x, 128x, 256x, 512x$
- b) 1, 3, 4, 3, 9, 3, 16, 3, 25, 3
- c) 3, 3, 6, 9, 15, 24, 39, 63, 102, 165
- d) 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27

27 Calcula los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones:

- a) $a_n = -4n + 2$
- b) $a_n = n^2 + 1$
- c) $a_n = 2^{-n}$
- d) $a_n = (n - 2)^n$

Solución:

- a) -2, -6, -10, -14, -18
- b) 2, 5, 10, 17, 26
- c) 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32
- d) -1, 0, 1, 16, 243

2. Progresiones aritméticas

28 Encuentra el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

- a) 7, 11, 15...
- b) 3, -2, -7...
- c) -7, -3, 1...
- d) 1/2, 3/4, 1...

Solución:

- a) $a_1 = 7, d = 4 \Rightarrow a_n = 7 + 4(n - 1) = 4n + 3$
- b) $a_1 = 3, d = -5 \Rightarrow a_n = 3 - 5(n - 1) = -5n + 8$
- c) $a_1 = -7, d = 4 \Rightarrow a_n = -7 + 4(n - 1) = 4n - 11$
- d) $a_1 = \frac{1}{2}, d = 1/4 \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(n - 1) = \frac{n + 1}{4}$

29 Escribe el término general y los tres primeros términos de la progresión aritmética cuyo primer término es $a_1 = 3$ y cuya diferencia es $d = -15/4$

Solución:

$$a_n = 3 - \frac{15}{4}(n - 1) = \frac{-15n + 27}{4}$$
$$3, -3/4, -9/2$$

30 En una progresión aritmética, $a_{11} = 3$ y la diferencia es $d = 2/7$. Calcula el primer término.

Solución:

$$a_{11} = 3, d = 2/7$$
$$a_1 + \frac{2}{7}(11 - 1) = 3 \Rightarrow a_1 = 1/7$$

31 En una progresión aritmética el primer término vale 3 y el sexto término vale 8. Calcula la diferencia.

Solución:

$$a_1 = 3, a_6 = 8$$
$$a_6 = a_1 + d(6 - 1)$$
$$8 = 3 + 5d$$
$$d = 1$$

32 En las siguientes progresiones aritméticas, calcula el término que ocupa el último valor:

- a) 4, 6, 8..., 30
- b) 7/2, 5/2, 3/2..., -21/2

Solución:

- a) $a_1 = 4, d = 2, a_n = 30$
 $a_n = a_1 + d(n - 1)$
 $30 = 4 + 2(n - 1)$
 $n = 14$
- b) $a_1 = 7/2, d = -1, a_n = -21/2$
 $a_n = a_1 + d(n - 1)$
 $-21/2 = 7/2 - (n - 1)$
 $n = 15$

- 33** En una progresión aritmética conocemos los términos $a_5 = 7$ y $a_7 = 25/3$. Calcula la diferencia y el primer término.

Solución:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$7 = a_1 + (5 - 1)d \Rightarrow a_1 + 4d = 7$$

$$25/3 = a_1 + (7 - 1)d \Rightarrow a_1 + 6d = \frac{25}{3}$$

Restando a la 2ª ecuación la 1ª:

$$2d = \frac{4}{3} \Rightarrow d = \frac{2}{3}$$

$$a_1 + 4 \cdot \frac{2}{3} = 7 \Rightarrow a_1 = \frac{13}{3}$$

- 34** Calcula la suma de los 15 primeros términos de la progresión aritmética cuyo término general es $a_n = 3n + 12$

Solución:

$$a_1 = 3 + 12 = 15$$

$$a_{15} = 3 \cdot 15 + 12 = 57$$

$$S_{15} = \frac{15 + 57}{2} \cdot 15 = 540$$

- 35** Calcula la suma de los 12 primeros términos de la progresión aritmética cuyo término general es $a_n = n/3 + 4/3$

Solución:

$$a_1 = 1/3 + 4/3 = 5/3$$

$$a_{12} = 12/3 + 4/3 = 16/3$$

$$S_{12} = \frac{5/3 + 16/3}{2} \cdot 12 = 42$$

3. Progresiones geométricas

- 36** Encuentra el término general de las siguientes progresiones geométricas:

- a) 6, 12, 24...
- b) 1/3, 1, 3...
- c) -3, 6, -12...
- d) 3/4, -1/2, 1/3...

Solución:

$$a) a_1 = 6, r = 2, a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$$

$$b) a_1 = \frac{1}{3}, r = 3, a_n = \frac{1}{3} \cdot 3^{n-1} = 3^{n-2}$$

$$c) a_1 = -3, r = -2, a_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$$

$$d) a_1 = \frac{3}{4}, r = -2/3, a_n = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

- 37** Dada una progresión geométrica cuyo primer término es $a_1 = 8$ y cuya razón es $r = 3/4$, calcula:

- a) a_6
- b) a_{10}
- c) a_{20}
- d) a_n

Solución:

$$a) a_6 = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$$

$$b) a_{10} = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$$

$$c) a_{20} = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{19}$$

$$d) a_n = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

- 38** En una progresión geométrica, $a_7 = 64/81$ y la razón $r = 2/3$. Calcula el primer término.

Solución:

$$a_7 = a_1 \cdot r^{7-1}$$

$$\frac{64}{81} = a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \Rightarrow \frac{2^6}{3^4} = a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$a_1 = 3^2 = 9$$

- 39** En la progresión geométrica -5, 10, -20..., ¿qué término vale 640?

Solución:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_1 = -5, r = -2$$

$$640 = -5 \cdot (-2)^{n-1}$$

$$-128 = (-2)^{n-1}$$

$$(-2)^7 = (-2)^{n-1}$$

$$n - 1 = 7 \Rightarrow n = 8$$

Ejercicios y problemas

- 40** En una progresión geométrica el primer término es $1/3$ y el séptimo término es 243. Calcula la razón.

Solución:

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 \cdot r^{n-1} \\ 243 &= 1/3 \cdot r^{7-1} \\ r^6 &= 729 \\ r^6 &= 3^6 \\ r &= \pm 3\end{aligned}$$

- 41** Encuentra la razón de la progresión geométrica que tiene $a_1 = 27/64$ y $a_8 = 2/81$

Solución:

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 \cdot r^{n-1} \\ \frac{2}{81} &= \frac{27}{64} \cdot r^{8-1} \\ r^7 &= \left(\frac{2}{3}\right)^7 \\ r &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

- 42** Calcula la suma de los 12 primeros términos de las siguientes progresiones:

- a) 4, -8, 16...
b) $1/10, 1/5, 2/5, \dots$

Solución:

$$\begin{aligned}\text{a) } a_1 &= 4, r = -2 \\ a_{12} &= 4 \cdot (-2)^{11} \\ S_{12} &= \frac{4 \cdot (-2)^{11} \cdot (-2) - 4}{-2 - 1} = -5460 \\ \text{b) } a_1 &= \frac{1}{10}, r = 2 \\ a_{12} &= \frac{1}{10} \cdot 2^{11} \\ S_{12} &= \frac{1/10 \cdot 2^{11} \cdot 2 - 1/10}{2 - 1} = \frac{819}{2}\end{aligned}$$

- 43** Calcula la suma de los infinitos términos de las siguientes progresiones:

- a) 9, 3, 1...
b) $9/4, 3/2, 1, \dots$

Solución:

$$\begin{aligned}\text{a) } a_1 &= 9, r = \frac{1}{3} \\ S &= \frac{9}{1 - (1/3)} = \frac{27}{2} \\ \text{b) } a_1 &= \frac{9}{4}, r = \frac{2}{3} \\ S &= \frac{9/4}{1 - (2/3)} = \frac{27}{4}\end{aligned}$$

- 44** ¿Cuántos términos hay que tomar de la progresión 5, 10, 20... para que la suma sea 2555?

Solución:

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} \\ a_1 &= 5, r = 2 \\ a_n &= 5 \cdot 2^{n-1} \\ \frac{5 \cdot 2^{n-1} \cdot 2 - 5}{2 - 1} &= 2555 \\ 5(2^n - 1) &= 2555 \\ 2^n &= 512 \\ 2^n &= 2^9 \\ n &= 9\end{aligned}$$

- 45** La suma de los infinitos términos de una progresión es 12 y su razón $r = 1/2$. Halla el primer término.

Solución:

$$\begin{aligned}S &= \frac{a_1}{1 - r} \\ 12 &= \frac{a_1}{1 - 1/2} \\ a_1 &= 6\end{aligned}$$

4. Aplicaciones: interés simple y compuesto

- 46** En un depósito ofrecen un 3,5% de interés simple por 4 años. Si se depositan 12 000 € y Hacienda retiene el 18% de los intereses, calcula el capital acumulado al finalizar el período.

Solución:

El tanto por uno final: $0,035 \cdot 0,82 = 0,0287$

$$I = c \cdot r \cdot t$$

$$I = 12\,000 \cdot 0,0287 \cdot 4 = 1\,377,60 \text{ €}$$

$$C = 12\,000 + 1\,377,60 = 13\,377,60 \text{ €}$$

- 47** Calcula los años que ha estado depositado un capital de 25 500 € al 6% de interés si, realizada la retención de Hacienda del 18%, se han generado 5 018,40 € de intereses.

Solución:

Interés bruto: $5\,018,40 : 0,82 = 6\,120 \text{ €}$

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow t = \frac{I}{c \cdot r}$$

$$t = \frac{6\,120}{25\,500 \cdot 0,06} = 4 \text{ años}$$

- 48** Calcula el rédito o tanto por ciento al que se han depositado 20 000 € a interés simple durante 2 años si, una vez retenido el 18% de Hacienda, los intereses generados son de 1 640 €

Solución:

Interés bruto: $1\,640 : 0,82 = 2\,000 \text{ €}$

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow r = \frac{I}{c \cdot t}$$

$$r = \frac{2\,000}{20\,000 \cdot 2} = 0,05 \Rightarrow R = 5\%$$

- 49** Una entidad financiera ofrece un 3,5% anual por un depósito renovable todos los meses. Si los intereses no se acumulan en el depósito y éste se renueva 5 meses, ¿qué interés se obtendrá por 18 000 € una vez descontado el 18% de retención de Hacienda?

Solución:

Tanto por uno final: $0,035 \cdot 0,82 = 0,0287$

$$I = c \cdot r \cdot \frac{t}{n}$$

$$I = 18\,000 \cdot 0,0287 \cdot 5/12 = 215,25 \text{ €}$$

- 50** ¿Qué capital se acumula si se colocan 31 000 € al 5% de interés compuesto durante 3 años si los intereses se abonan trimestralmente y Hacienda retiene el 18% al finalizar el período?

Solución:

$$C = c \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$$

$$C = 31\,000 \left(1 + \frac{0,05}{4}\right)^{4 \cdot 3} = 35\,983,39 \text{ €}$$

Los intereses son: $35\,983,39 - 31\,000 = 4\,983,39 \text{ €}$

Hacienda retiene: $4\,983,39 \cdot 0,18 = 897,01 \text{ €}$

El capital final neto será:

$$35\,983,39 - 897,01 = 35\,086,38 \text{ €}$$

- 51** ¿Qué capital inicial es necesario tener depositado para que, a interés compuesto durante 5 años al 6% anual y con períodos de capitalización mensuales, se acumule un capital final de 26 977 €?

Solución:

$$C = c \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$$

$$c \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12 \cdot 5} = 26\,977$$

$$1,005^{60} c = 26\,977$$

$$c = 26\,977 : 1,005^{60}$$

$$c = 20\,000 \text{ €}$$

Ejercicios y problemas

Para ampliar

- 52** Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas o geométricas y encuentra el término general:

- a) $-3/5, 3/10, 6/5 \dots$
- b) $11/3, 35/12, 13/6 \dots$
- c) $5/6, 1/2, 3/10 \dots$
- d) $3/4, -1/2, 1/3 \dots$

Solución:

a) $a_1 = -3/5, d = 9/10$

Progresión aritmética de término general:

$$a_n = -\frac{3}{5} + \frac{9}{10}(n-1) = \frac{9n-15}{10}$$

b) $a_1 = 11/3, d = -3/4$

Progresión aritmética de término general:

$$a_n = \frac{11}{3} - \frac{3}{4}(n-1) = \frac{53-9n}{12}$$

c) $a_1 = 5/6, r = 3/5$

Progresión geométrica de término general:

$$a_n = 5/9 \cdot (3/5)^{n-1}$$

d) $a_1 = 3/4, r = -2/3$

Progresión geométrica de término general:

$$a_n = 3/4 \cdot (-2/3)^{n-1}$$

- 53** Escribe el término general y los tres primeros términos de la progresión aritmética cuyo primer término es $a_1 = 3/4$ y cuya diferencia es $d = 0,5$

Solución:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 3/4 + 0,5(n-1) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(n-1)$$

$$a_n = \frac{2n+1}{4}$$

$$3/4, 5/4, 7/4$$

- 54** Calcula el término que ocupa el lugar 100 en la progresión:

$$-5, -13/3, -11/3 \dots$$

Solución:

$$a_n = -5, d = 2/3$$

$$a_{100} = -5 + (100-1)2/3 = -5 + 66 = 61$$

$$a_{100} = 61$$

- 55** Calcula el primer término y la diferencia en las progresiones aritméticas en las que:

a) $a_3 = 70$ y $a_6 = 115$

b) $a_5 = 6$ y $a_9 = 7$

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + 2d = 70 \\ a_1 + 5d = 115 \end{array} \right\}$$

Restando a la 2ª ecuación la 1ª:

$$3d = 45 \Rightarrow d = 15$$

$$a_1 + 2 \cdot 15 = 70 \Rightarrow a_1 = 70 - 30 = 40$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + 4d = 6 \\ a_1 + 8d = 7 \end{array} \right\}$$

Restando a la 2ª ecuación la 1ª:

$$4d = 1 \Rightarrow d = 1/4$$

$$a_1 + 4 \cdot \frac{1}{4} = 6 \Rightarrow a_1 = 5$$

- 56** Calcula la suma de los 12 primeros términos de la progresión aritmética cuyo término general es $a_n = 5n/2 + 1/2$

Solución:

$$a_1 = 3$$

$$a_{12} = 30 + 1/2 = 61/2$$

$$S = \frac{3 + 61/2}{2} \cdot 12 = 201$$

- 57** Dada una progresión geométrica cuyo primer término es $a_1 = 3/8$ y cuya razón es $r = 4/3$, calcula:

a) a_5

b) a_{15}

c) a_{30}

d) a_n

Solución:

$$a) a_5 = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

$$b) a_{15} = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{14} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{13}$$

$$c) a_{30} = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{29} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{28}$$

$$d) a_n = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}$$

58 Calcula la suma de los 5 primeros términos de las siguientes progresiones:

a) 12, 4, 4/3...

b) 9/4, 3/2, 1...

Solución:

a) $a_1 = 12, r = 1/3$

$a_5 = 12 \cdot (1/3)^4$

$$S_5 = \frac{12(1/3)^4 \cdot 1/3 - 12}{1/3 - 1} = \frac{484}{27}$$

b) $a_1 = 9/4, r = 2/3$

$a_5 = 9/4 \cdot (2/3)^4 = 4/9$

$$S_5 = \frac{4/9 \cdot 2/3 - 9/4}{2/3 - 1} = \frac{211}{36}$$

59 Calcula la suma de los infinitos términos de las siguientes progresiones:

a) 5, 5/4, 5/16...

b) $\sqrt{2}, 1, 1/\sqrt{2}...$

Solución:

a) $a_1 = 5, r = 1/4$

$$S = \frac{5}{1 - 1/4} = \frac{20}{3}$$

b) $a_1 = \sqrt{2}, r = 1/\sqrt{2}$

$$S = \frac{\sqrt{2}}{1 - 1/\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2} - 1}$$

60 En una progresión geométrica $a_4 = 125$ y $a_6 = 3125$. Calcula el primer término y la razón.

Solución:

$$a_1 \cdot r^3 = 125 \quad \left\{ \right.$$

$$a_1 \cdot r^5 = 3125 \quad \left\{ \right.$$

Dividiendo la 2ª ecuación entre la 1ª:

$$r^2 = 25 \Rightarrow r = \pm 5$$

Si $r = 5 \Rightarrow a_1 = 1$

Si $r = -5 \Rightarrow a_1 = -1$

61 El primer término de una progresión geométrica es 225, y el cuarto término es 72/5. Calcula la suma de sus infinitos términos.

Solución:

$$225 \cdot r^3 = 72/5$$

$$r^3 = 8/125 = (2/5)^3$$

$$r = 2/5$$

$$S = \frac{225}{1 - 2/5} = 375$$

62 Calcula los años que ha estado depositado un capital de 28 500 € al 4,5% de interés simple si se han generado 5 258,25 € una vez retenido el 18% de Hacienda.

Solución:

Interés bruto: $5\,258,25 : 0,82 = 6\,412,50$ €

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow t = \frac{I}{c \cdot r}$$

$$t = \frac{6\,412,50}{28\,500 \cdot 0,045} = 5 \text{ años}$$

63 Calcula el rédito al que se han depositado 15 000 € a interés simple durante 3 años si, una vez retenido el 18% de Hacienda, los intereses generados son de 1 660,50 €

Solución:

Interés bruto: $1\,660,50 : 0,82 = 2\,025$ €

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow r = \frac{I}{c \cdot t}$$

$$r = \frac{2\,025}{15\,000 \cdot 3} = 0,045 \Rightarrow R = 4,5\%$$

64 Una entidad financiera ofrece un 4,25% anual por un depósito renovable todos los meses. Si los intereses no se acumulan en el depósito y éste se renueva 3 meses, ¿qué interés se obtiene por 24 000 € con la retención del 18% de Hacienda?

Solución:

Tanto por uno final: $0,0425 \cdot 0,82 = 0,03485$

$$I = c \cdot r \cdot \frac{t}{n}$$

$$I = 24\,000 \cdot 0,03485 \cdot 3/12 = 209,10 \text{ €}$$

Ejercicios y problemas

- 65** Qué capital bruto se acumula si se colocan 40 500 € al 4,5% de interés compuesto durante 4 años si los intereses se abonan según las modalidades siguientes:

- a) Anualmente.
b) Mensualmente.

Solución:

a) $C = c(1 + r)^t$

$$C = 40\,500 \cdot 1,045^4 = 48\,297 \text{ €}$$

b) $C = c \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$

$$C = 40\,500 \left(1 + \frac{0,045}{12}\right)^{12 \cdot 4} = 48\,470,98 \text{ €}$$

Con calculadora

- 66** Calcula los 5 siguientes términos de las progresiones:

- a) 3,27; 3,45; 3,63... b) 1 000, 1 200, 1 440...

Solución:

a) $a_1 = 3,27$; $d = 0,18$

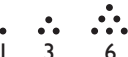
$$3,27; 3,45; 3,63; 3,81; 3,99; 4,17; 4,35; 4,53 \dots$$

b) $a_1 = 1\,000$; $r = 1,2$

$$1\,000; 1\,200; 1\,440; 1\,728; 2\,073,6; 2\,488,32; 2\,985,984; 3\,583,1808$$

Problemas

- 67** Continúa las siguientes series de números figurados, hasta obtener tres términos más:

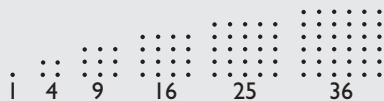
- a)  b) 

Solución:

a)



b)



- 68** Calcula la suma de los 15 primeros múltiplos positivos de 6

Solución:

$$6, 12, 18 \dots$$

$$a_1 = 6, d = 6$$

$$a_{15} = 6 + 6(15 - 1) = 90$$

$$S_{15} = \frac{6 + 90}{2} \cdot 15 = 720$$

- 69** Calcula la suma de los primeros 100 números impares.

Solución:

$$1, 3, 5, 7 \dots$$

$$a_1 = 1, d = 2$$

$$a_{100} = 1 + (100 - 1) \cdot 2 = 199$$

$$S_{100} = \frac{1 + 199}{2} \cdot 100 = 10\,000$$

- 70** Un móvil avanza 5 metros en un segundo y sigue avanzando de forma que cada segundo avanza 2 metros más que en el segundo anterior. ¿Cuánto recorrerá en un minuto?

Solución:

$$5, 7, 9 \dots$$

$$a_1 = 5, d = 2$$

$$a_{60} = 5 + (60 - 1) \cdot 2 = 123 \text{ m}$$

$$S_{60} = \frac{5 + 123}{2} \cdot 60 = 3\,840 \text{ m}$$

- 71** Un dependiente recibe el primer día de trabajo una gratificación de 10 €. En los días sucesivos, esta gratificación va aumentando en 1,5 €, de manera que, en su última jornada, cobra 143,5 €. ¿Cuántos días trabajó y cuánto cobró en total por las gratificaciones?

Solución:

$$\begin{aligned} a_1 &= 10 \text{ €, } d = 1,5 \text{ €} \\ 10 + 1,5(n-1) &= 143,5 \\ 1,5n + 8,5 &= 143,5 \\ n &= 90 \text{ días} \\ S_{90} &= \frac{10 + 143,5}{2} \cdot 90 = 6\,907,5 \text{ €} \end{aligned}$$

- 72** El precio de la primera entrega de una colección de minerales es de 2 €. En las siguientes entregas el precio sube 0,03 € más que en la anterior. Si la colección consta de 100 ejemplares, ¿cuánto se pagará por el total de la colección?

Solución:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \text{ €, } d = 0,03 \text{ €} \\ a_{100} &= 2 + 99 \cdot 0,03 = 4,97 \text{ €} \\ S_{100} &= \frac{2 + 4,97}{2} \cdot 100 = 348,5 \text{ €} \end{aligned}$$

- 73** Jorge cobra 18 € semanales de paga y decide ahorrar 1,8 € el primer mes y aumentar cada mes 0,75 € más que el anterior. ¿Cuánto ahorrará en un año?

Solución:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1,8 \text{ €, } d = 0,75 \text{ €} \\ a_{12} &= 1,8 + 11 \cdot 0,75 = 10,05 \text{ €} \\ S_{12} &= \frac{1,8 + 10,05}{2} \cdot 12 = 71,1 \text{ €} \end{aligned}$$

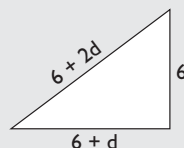
- 74** Se ha hecho un pozo de 40 m de profundidad. Por el primer metro se han pagado 7,5 € y por cada metro sucesivo se han pagado 2,3 € más que por el anterior. ¿Cuál es el coste del pozo?

Solución:

$$\begin{aligned} a_1 &= 7,5 \text{ €, } d = 2,3 \text{ €} \\ a_{40} &= 7,5 + 39 \cdot 2,3 = 97,2 \text{ €} \\ S_{40} &= \frac{7,5 + 97,2}{2} \cdot 40 = 2\,094 \text{ €} \end{aligned}$$

- 75** Calcula los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que están en progresión aritmética y que el menor de ellos mide 6 cm

Solución:



$$\begin{aligned} a_1 &= 6 \\ a_2 &= 6 + d \\ a_3 &= 6 + 2d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6 + 2d)^2 &= (6 + d)^2 + 6^2 \\ 3d^2 + 12d - 36 &= 0 \Rightarrow d^2 + 4d - 12 = 0 \\ d &= 2 \\ d &= -6 \text{ (Solución no válida)} \\ \text{Los lados son: } &6 \text{ cm, } 8 \text{ cm, } 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

- 76** Se quiere saldar semanalmente una deuda. La primera semana se pagan 5 € y en cada una de las semanas siguientes se van pagando 4 € más que en la anterior. Si se paga en 30 semanas, ¿a cuánto asciende el importe de la deuda?

Solución:

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 \text{ €, } d = 4 \text{ €} \\ a_{30} &= 5 + 29 \cdot 4 = 121 \text{ €} \\ S_{30} &= \frac{5 + 121}{2} \cdot 30 = 1\,890 \text{ €} \end{aligned}$$

- 77** Los ángulos de un hexágono están en progresión aritmética, y el menor de ellos mide 40°. Calcula los demás.

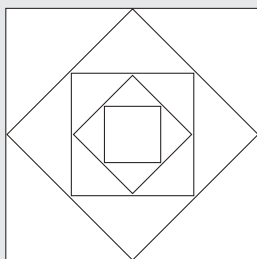
Solución:

$$\begin{aligned} a_1 &= 40^\circ \\ a_6 &= 40 + 5d \\ S_6 &= \frac{40 + 40 + 5d}{2} \cdot 6 \\ \frac{80 + 5d}{2} \cdot 6 &= 720 \\ 240 + 15d &= 720 \\ d &= 32^\circ \\ \text{Los ángulos son: } &40^\circ, 72^\circ, 104^\circ, 136^\circ, 168^\circ, 200^\circ \end{aligned}$$

Ejercicios y problemas

- 78** En un cuadrado se unen los puntos medios de sus lados y se obtiene otro cuadrado inscrito. En este último cuadrado se repite la operación, obteniéndose otro cuadrado inscrito. Si el lado del primer cuadrado mide 2 cm, calcula la suma de las áreas de todos los cuadrados.

Solución:



La sucesión de áreas es: 4, 2, 1, 1/2...

$$a_1 = 4, r = 1/2$$

$$S = \frac{4}{1 - 1/2} = 8 \text{ cm}^2$$

- 79** Una persona gana en su establecimiento un 7% más de lo que ganó el año anterior. Si el primer año ganó 28 000 €, ¿cuánto habrá obtenido en media docena de años?

Solución:

$$a_1 = 28\,000 \text{ €}$$

$$r = 1,07$$

$$a_6 = 28\,000 \cdot 1,07^5 = 39\,271,45 \text{ €}$$

$$S_6 = \frac{39\,271,45 \cdot 1,07 - 28\,000}{1,07 - 1} = 200\,292,16 \text{ €}$$

- 80** Se deja caer una pelota desde una altura de 52 cm. Después de cada bote en el suelo, sube 3/4 cm de la altura de la que cae. ¿Qué longitud recorrerá la pelota antes de llegar al reposo?

Solución:

Recorre de bajada:

$$a_1 = 52 \text{ cm}, r = 3/4$$

$$S = \frac{52}{1 - 3/4} = 208 \text{ m}$$

Recorre de subida:

$$a_1 = 39 \text{ cm}, r = 3/4$$

$$S = \frac{39}{1 - 3/4} = 156 \text{ m}$$

$$\text{Recorre en total: } 208 + 156 = 364 \text{ cm} = 3,64 \text{ m}$$

- 81** Se forma una sucesión de círculos concéntricos en los que cada radio es la mitad del radio del círculo anterior. Si el primer círculo tiene un diámetro de 4 cm, halla la suma de las áreas de todos los círculos.

Solución:

$$a_1 = 4\pi \text{ cm}^2$$

$$a_2 = \pi \text{ cm}^2$$

$$a_3 = \pi/4 \text{ cm}^2$$

Se obtiene una progresión geométrica de razón:

$$r = 1/4$$

$$S = \frac{4\pi}{1 - 1/4} = 16\pi/3 \text{ cm}^2 = 16,76 \text{ cm}^2$$

- 82** ¿Qué capital inicial es necesario tener depositado para que, a interés compuesto durante 3 años al 5% anual y con períodos de capitalización trimestrales, se acumule un capital final bruto de 29 692,10 €?

Solución:

$$C = c \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t} \Rightarrow c = \frac{C}{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^t}$$

$$c = \frac{29\,692,1}{\left(1 + \frac{0,05}{4}\right)^{4 \cdot 3}} = \frac{29\,692,1}{1,0125^{12}}$$

$$c = 25\,580 \text{ €}$$

- 83** Calcula los años que ha estado depositado un capital de 45 000 € al 6,5% de interés simple si, una vez hecha la retención del 18% de Hacienda, se han generado 7 195,50 €

Solución:

$$\text{Interés bruto: } 7\,195,50 : 0,82 = 8\,775 \text{ €}$$

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow t = \frac{I}{c \cdot r}$$

$$t = \frac{8\,775}{45\,000 \cdot 0,065} = 3 \text{ años}$$

- 84** Una entidad financiera paga el 7,5% del dinero depositado si éste se mantiene 3 años. Calcula, en los siguientes casos, cuánto se ganará al finalizar los tres años por una imposición de 10 000 € si Hacienda retiene el 18%:

- Los intereses se ingresan en una cuenta distinta.
- Los intereses se ingresan en la misma cuenta.

Solución:

a) El interés es simple.

El tanto por uno final: $0,075 \cdot 0,82 = 0,0615$

$$I = c \cdot r \cdot t$$

$$I = 10\,000 \cdot 0,0615 \cdot 3 = 1\,845 \text{ €}$$

b) El interés es compuesto.

$$C = c(1 + r)^t$$

$$C = 10\,000 \cdot 1,075^3 = 12\,423$$

Los intereses son: $12\,423 - 10\,000 = 2\,423 \text{ €}$

Con la retención de Hacienda:

$$2\,423 \cdot 0,82 = 1\,986,86 \text{ €}$$

- 85** Calcula el rédito al que se han depositado 12 000 € a interés simple durante 18 meses si los intereses generados, con la retención de Hacienda descontada, han sido de 664,20 €

Solución:Interés bruto: $664,20 : 0,82 = 810 \text{ €}$

$$I = c \cdot r \cdot \frac{t}{n} \Rightarrow r = \frac{I \cdot n}{c \cdot t}$$

$$r = \frac{810 \cdot 12}{12\,000 \cdot 18} = 0,045 \Rightarrow R = 4,5\%$$

Para profundizar

- 86** Comprueba que las siguientes expresiones están en progresión aritmética y calcula el séptimo término:

$$x^2 - 2x + 1, \quad x^2 + 1 \quad y \quad x^2 + 2x + 1$$

Solución:

$$d = a_2 - a_1 = x^2 + 1 - (x^2 - 2x + 1) = 2x$$

$$d = a_3 - a_2 = x^2 + 2x + 1 - (x^2 + 1) = 2x$$

Están en progresión aritmética de diferencia: $d = 2x$

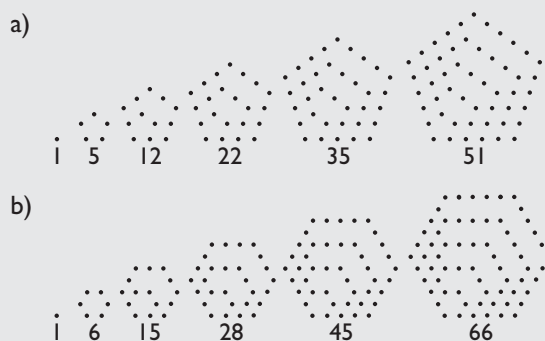
$$a_7 = a_1 + 6d = x^2 - 2x + 1 + 12x = x^2 + 10x + 1$$

- 87** En una progresión aritmética, el primer término y el decimocuarto suman 342. ¿Cuánto suman el quinto y el décimo término?

Solución:

Los términos equidistantes de una progresión aritmética suman lo mismo. Luego sumarán 342

- 88** Continúa las siguientes series de números figurados hasta obtener tres términos más:

**Solución:**

- 89** En una progresión aritmética el primer término es 2 y el undécimo es 52. Razona lo que vale el sexto término.

Solución:

$$1 + 11 = 12; 12 : 2 = 6$$

El sexto término es el término central del primero y el undécimo. Luego:

$$a_6 = \frac{2 + 52}{2} = 27$$

- 90** La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente es 6 y la suma de sus dos primeros términos es $16/3$. Calcula el primer término.

Solución:

$$6 = \frac{a_1}{1 - r} \Rightarrow a_1 = 6(1 - r)$$

$$a_1 + a_1 \cdot r = 16/3 \Rightarrow a_1(1 + r) = 16/3$$

Sustituyendo a_1 en la 2ª ecuación:

$$6(1 - r)(1 + r) = 16/3$$

$$6(1 - r^2) = 16/3$$

$$r^2 = 1/9$$

$$r = \pm 1/3$$

$$\text{Si } r = 1/3 \Rightarrow a_1 = 4$$

$$\text{Si } r = -1/3 \Rightarrow a_1 = 8$$

Ejercicios y problemas

- 91** De un vaso lleno de leche se vacía la mitad y se rellena de agua. Se retira la mitad del nuevo contenido y se vuelve a rellenar con agua. Si este proceso se repite seis veces, ¿qué parte de agua contiene el vaso?

Solución:

La cantidad de leche y de agua que hay en el vaso es:

Leche	1	1/2	1/4	1/8	...
Agua	0	1/2	3/4	7/8	...

La cantidad de leche sigue una progresión geométrica de razón 1/2

$$a_6 = 1 \cdot (1/2)^5 = 1/32$$

La cantidad de agua es: 31/32

- 92** Un depósito ofrece un 4% de interés simple anual, renovable mensualmente y sin acumular los intereses en el depósito. ¿Cuánto tiempo se deben depositar 12 000 € para generar unos intereses netos, es decir, descontando el 18% de Hacienda, de 984 €?

Solución:

Interés bruto: $984 : 0,82 = 1\,200$ €

$$I = c \cdot r \cdot \frac{t}{n} \Rightarrow t = \frac{I \cdot n}{c \cdot r}$$

$$t = \frac{1\,200 \cdot 12}{12\,000 \cdot 0,04} = 30 \text{ meses}$$

- 93** Calcula el capital inicial que se debe depositar al 6% de interés compuesto con períodos de capitalización mensual, para que, al cabo de 10 años, se conviertan en 33 204 € brutos.

Solución:

$$C = c \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$$

$$c \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12 \cdot 10} = 33\,204$$

$$1,005^{120} c = 33\,204$$

$$c = 33\,204 : 1,005^{120}$$

$$c = 18\,250 \text{ €}$$

- 94** Calcula el tiempo que hay que tener un capital depositado en un banco al 5% con interés simple, para que el capital se duplique.

Solución:

$$I = c$$

$$c \cdot r \cdot t = c$$

$$r \cdot t = 1$$

$$t = \frac{1}{r}$$

$$t = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ años}$$

Aplica tus competencias

- 95** Calcula la cuota mensual que hay que pagar por una hipoteca de 10 000 € al 3,50% y contratada a 12 años.

Solución:

$$\text{Cuota mensual: } 8,51 \cdot 10 = 85,1 \text{ €}$$

- 96** Calcula la cuota mensual que hay que pagar por una hipoteca de 25 000 € al 4,25% y contratada a 15 años.

Solución:

$$\text{Cuota mensual: } 7,52 \cdot 25 = 188 \text{ €}$$

- 97** Calcula la hipoteca que se puede amortizar al 5,25% durante 10 años pagando de mensualidad 268,25 €

Solución:

$$\text{Hipoteca: } 268,25 : 10,73 = 25 \Rightarrow 25\,000 \text{ €}$$

- 98** Calcula la hipoteca que se puede amortizar al 5% durante 18 años pagando de mensualidad 210,9 €

Solución:

$$\text{Hipoteca: } 210,9 : 7,03 = 30 \Rightarrow 30\,000 \text{ €}$$

Comprueba lo que sabes

- 1** Define progresión aritmética y pon un ejemplo.

Solución:

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que cada término se halla sumando al término anterior un número constante que se llama **diferencia** y que se representa con la letra **d**.

La diferencia **d** de una progresión aritmética se calcula restando dos términos consecutivos.

Ejemplo

La sucesión 3, 7, 11, 15... es una progresión aritmética.

- 2** Encuentra el término general de las progresiones siguientes:

- a) 7, 11, 15...
b) 3, -12, 48...

Solución:

- a) $a_1 = 7$, $d = 4$
 $a_n = 7 + 4(n-1) = 4n + 3$
b) $a_1 = 3$, $r = -4$
 $a_n = 3 \cdot (-4)^{n-1}$

- 3** Calcula los años que ha estado depositado un capital de 25 500 € al 6% de interés simple si, realizada la retención de Hacienda del 18%, se han generado 5 018,40 € de intereses.

Solución:

Interés bruto: $5\,018,40 : 0,82 = 6\,120$ €

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow t = \frac{I}{c \cdot r}$$

$$t = \frac{6\,120}{25\,500 \cdot 0,06} = 4 \text{ años}$$

- 4** Calcula la suma de los 25 primeros términos de la progresión cuyo término general es $a_n = 4n - 3$

Solución:

Es una progresión aritmética:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, d = 4 \\ a_{25} &= 4 \cdot 25 - 3 = 97 \\ S_{25} &= \frac{1 + 97}{2} \cdot 25 = 1\,225 \end{aligned}$$

- 5** Calcula la suma de los 10 primeros términos de la siguiente progresión: 2, 6, 18...

Solución:

Es una progresión geométrica:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, r = 3 \\ a_{10} &= 2 \cdot 3^9 \\ S_{10} &= \frac{2 \cdot 3^9 \cdot 3 - 2}{3 - 1} = 59\,048 \end{aligned}$$

- 6** Calcula la suma de los infinitos términos de la siguiente progresión: 1/10, 1/100...

Solución:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1/10, r = 1/10 \\ S &= \frac{1/10}{1 - 1/10} = 1/9 \end{aligned}$$

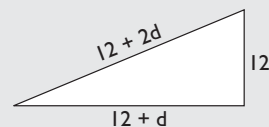
- 7** Se depositan 6 500 € al 5% de interés compuesto durante 4 años. Hacienda retiene el 18% de los intereses cuando se recupera el capital. Calcula el capital final si los intereses se abonan anualmente.

Solución:

$$\begin{aligned} C &= c(1 + r)^t \\ C &= 6\,500 \cdot 1,05^4 = 7\,900,79 \text{ €} \\ \text{Los intereses son: } &7\,900,79 - 6\,500 = 1\,400,79 \text{ €} \\ \text{Hacienda retiene: } &1\,400,79 \cdot 0,18 = 252,14 \text{ €} \\ \text{El capital final neto será: } &7\,900,79 - 252,14 = 7\,648,65 \text{ €} \end{aligned}$$

- 8** Los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética. Calcula su longitud sabiendo que el menor mide 12 cm

Solución:



$$\begin{aligned} (12 + 2d)^2 &= (12 + d)^2 + 12^2 \\ 3d^2 + 24d - 144 &= 0 \\ d^2 + 8d - 48 &= 0 \\ d &= 4 \text{ (} d = -12 \text{ no es válida)} \\ \text{Los lados son: } &12, 16 \text{ y } 20 \end{aligned}$$

Paso a paso

- 99** Calcula los diez primeros términos de la siguiente sucesión:

$$a_n = 4n + 1$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

- 100** Dada la siguiente sucesión, calcula la suma de los 25 primeros términos:

$$a_n = 7n - 5$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de DERIVE o Wiris:

- 101** En la progresión $a_n = 3n + 4$, ¿qué término vale 52?

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

- 102** En una progresión geométrica, $a_4 = 135$ y $a_6 = 1\,215$. Halla el primer término y la razón de la progresión.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

- 103** Se depositan 1 000 € al 5% de interés compuesto durante 3 años. ¿Qué capital tendremos al finalizar ese tiempo?

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

- 104 Internet.** Abre la web: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas**, **curso** y **tema**.

Practica

- 105** Halla los términos generales de las siguientes sucesiones y calcula los diez primeros términos de cada una de ellas:

- a) 12, 20, 28... b) 14, 4, -6...
c) 5, 15, 45... d) 6, 3, 3/2...

Solución:

- a) $a_n = 12 + 8(n - 1) = 8n + 4$
12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76, 84
b) $a_n = 14 - 10(n - 1) = -10n + 24$
14, 4, -6, -16, -26, -36, -46, -56, -66, -76
c) $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$
5, 15, 45, 135, 405, 1 215, 3 645, 10 935, 32 805, 98 415
d) $a_n = 6 \cdot (1/2)^{n-1}$
6, 3, 3/2, 3/4, 3/8, 3/16, 3/32, 3/64, 3/128, 3/256

- 106** Calcula los ocho primeros términos de las siguientes sucesiones:

- a) $a_n = 4^n + 2$
b) $a_n = 3n^2 - 5n + 2$
c) $a_n = 4 \cdot (-2/3)^n$
d) $a_n = (-2)^n$

Solución:

- a) 6, 18, 66, 258, 1 026, 4 098, 16 386, 65 538
b) 0, 4, 14, 30, 52, 80, 114, 154
c) -8/3, 16/9, -32/27, 64/81, -128/243, 256/729, -512/2 187, 1 024/6 561
d) -2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256

- 107** Calcula la suma de los 125 primeros términos de la progresión aritmética cuyo término general es $a_n = 4n/5 + 2/3$

Solución:

$$S = 19\,150/3$$

- 108** Calcula la suma de los 7 primeros términos de la progresión geométrica cuyo término general es $a_n = 3 \cdot 2^n$

Solución:

$$S_7 = 762$$

- 109** Calcula la suma de los infinitos términos de la siguiente progresión:

$$3, 1, 1/3, \dots$$

Solución:

$$a_n = 3 \cdot (1/3)^{n-1}$$

$$S = 9/2$$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de DERIVE o Wiris:

- 110** En la progresión 9, 5, 1..., ¿qué lugar ocupa el término que vale -47?

Solución:

$$a_n = -4n + 13$$

$$-4n + 13 = -47$$

$$n = 15$$

- 111** En una progresión aritmética conocemos los términos $a_6 = 23/6$ y $a_9 = 35/6$. Calcula la diferencia y el primer término.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} a + 5d = 23/6 \\ a + 8d = 35/6 \end{array} \right\}$$

$$a_1 = 1/2$$

$$d = 2/3$$

- 112** En la progresión geométrica 8, 2, 1/2..., ¿qué término vale 1/2 048?

Solución:

$$a_1 = 8, r = \frac{1}{4}$$

$$8(1/4)^{n-1} = 1/2\,048 \Rightarrow n = 8$$

- 113** Encuentra la razón de la progresión geométrica que tiene $a_4 = 32/9$ y $a_6 = 512/81$

Solución:

$$r^2 = (512/81)/(32/9)$$

$$r = \pm 4/3$$

- 114** Se depositan 2 000 € durante 3 años a un 5% de interés. Si Hacienda retiene un 18% de los intereses, ¿qué interés se obtiene al acabar dicho período?

Solución:

$$\text{El tanto por uno sera: } 0,05 \cdot 0,82 = 0,041$$

$$I = c \cdot r \cdot t = 2\,000 \cdot 0,041 \cdot 3 = 246 \text{ €}$$

- 115** Se depositan 3 000 € a un interés compuesto del 7% durante 3 años con períodos de capitalización mensuales. Si Hacienda retiene el 18% cuando se recupera el capital, calcula el capital final.

Solución:

El capital final será:

$$C = c \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t} \Rightarrow C = 3\,698,78 \text{ €}$$

Los intereses son:

$$3\,698,78 - 3\,000 = 698,78 \text{ €}$$

Hacienda retiene:

$$698,78 \cdot 0,18 = 125,78 \text{ €}$$

El capital final neto sera:

$$3\,698,78 - 125,78 = 3\,573 \text{ €}$$